摛藻堂四庫全書薈要

子部

欽定四庫全書薈要

子部

御製數理精蘊下編卷十三

詳校官主事臣陳木

欽定四庫全書薈要卷一萬八百三十六 子部

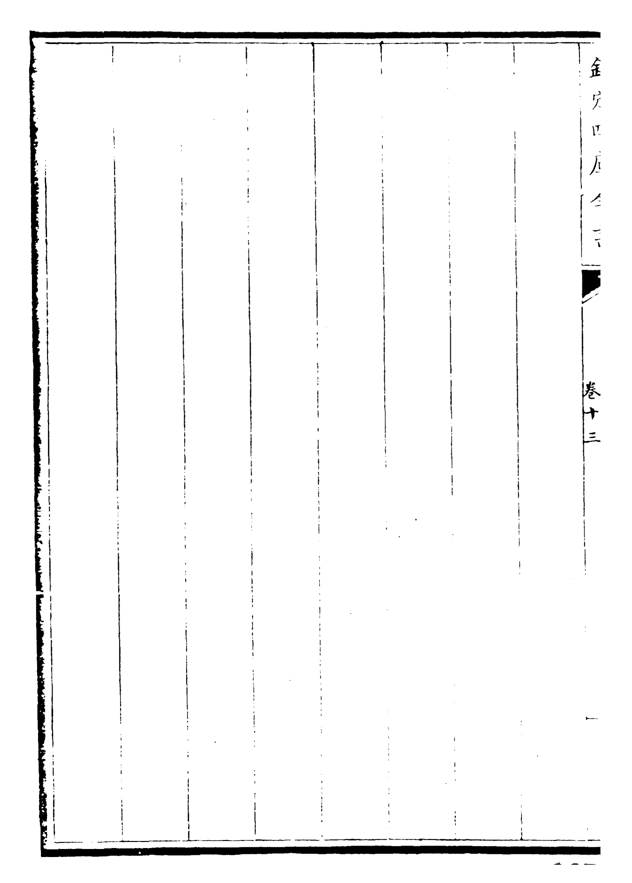
御製數理精藴下編卷十三

面部三

勾股

勾股弦和較相求法下　勾股積與和較相求

正勾股比例



勾股弦和較相求法下

設如有勾股較七尺勾股弦總和四十尺求勾股弦各幾何第三十四

法以勾股弦總和四十尺內減勾股較七尺餘三十三尺為兩勾一弦之共數蓋勾股弦總和為一勾一股一弦之共數內減勾股較是於股內減勾股較即又得一勾矣故為兩勾一弦也自乘得一千零八十九尺又以勾股較七尺自乘得四十九尺兩自乘數相減餘一千零四十尺折半

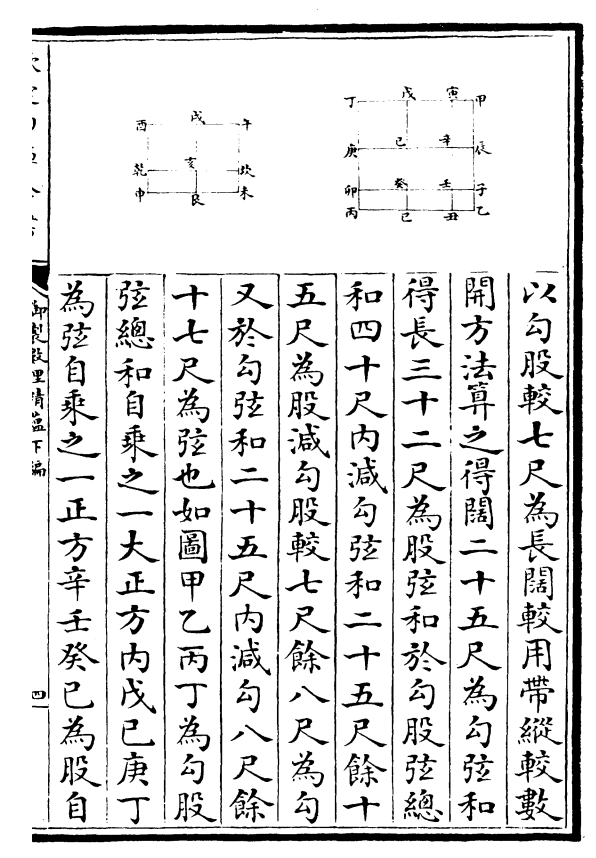
得五百二十尺為長方積乃以勾股弦總和四十尺與兩勾一弦之共數三十三尺相加得七十三尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊八尺為勾加勾股較七尺得十五尺為股於勾股弦總和四十尺內減勾八尺又減股十五尺餘十七尺為弦也如圖甲乙丙丁為兩勾一弦自乘之一大正方內戊己庚辛為弦自乘之一正方甲子戊壬丑乙

坎 戌
乾 亥

寅巳庚卯丙辰癸辛巳丁為勾自乘之四正方壬戊辛癸子丑巳戊巳寅卯庚辛庚辰巳為勾弦相乘之四長方弦自乘之一正方内容四勾股積為勾股相乘之二長方又勾股較自乘之一小正方令於甲乙丙丁兩勾一弦自乘之一大正方内減去午未申酉勾股較自乘之一小正方尚餘勾股相乘之二長方勾弦相乘之四長方勾自乘之四正方

折半得勾股相乘之一長方勾弦相乘之二長方勾自乘之二正方與戌亥乾坎長方形等其闊即勾其長為兩勾兩弦一股其長闊和為三勾兩弦一股故以勾股弦總和與兩勾一弦之共數相併為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊為勾也

又法以勾股弦總和四十尺自乘得一千六百尺折半得八百尺為長方積乃



以勾股較七尺為長闊較用帶縱較數開方法算之得闊二十五尺為勾弦和得長三十二尺為股弦和於勾股弦總和四十尺內減勾弦和二十五尺餘十五尺為股減勾股較七尺餘八尺為勾又於勾弦和二十五尺內減勾八尺餘十七尺為弦也如圖甲乙丙丁為勾股弦總和自乘之一大正方內戊己庚丁為弦自乘之一正方辛壬癸己為股自

甲 寅 戊 丁
辰 辛 己 庚
子 壬 癸 卯
乙 丑 巳 丙

乘之一正方子乙丑壬為勾自乘之一正方甲辰辛寅與癸巳丙卯為勾弦相乘之二長方寅辛己戊與己癸卯庚為股弦相乘之二長方辰子壬辛與壬丑己癸為勾股相乘之二長方如以勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併則又與弦自乘之一正方相等是為弦自乘之正方二股弦相乘之長方二勾弦相乘之長方二勾股相乘之長方二

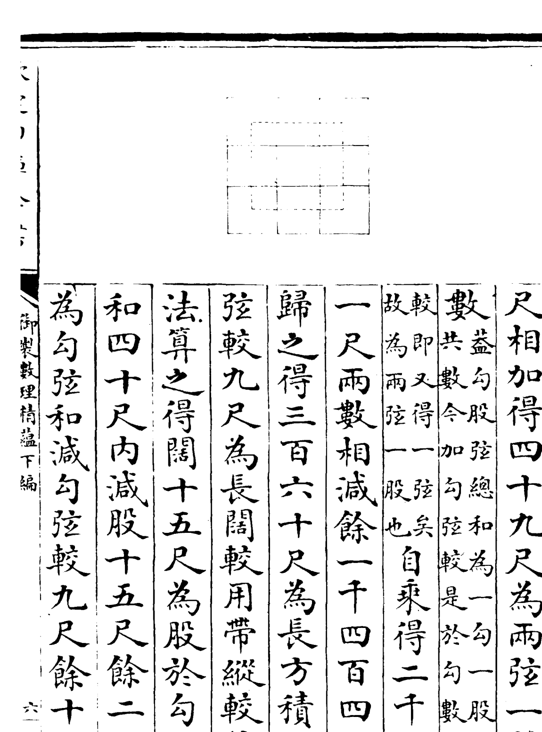
午 戌 酉
坎 亥 乾
未 艮 申

折半即得弦自乘之正方一股弦相乘之長方一勾弦相乘之長方一勾股相乘之長方一而與午未申酉勾弦和與股弦和相乘之長方等葢午未申酉之長方内戌亥乾酉為弦自乘之一正方午坎亥戌為股弦相乘之一長方亥艮申乾為勾弦相乘之一長方坎未艮亥為勾股相乘之一長方其闊即勾弦和其長即股弦和其長闊較即勾股較故

以勾股較為長闊較用帶縱較數開方法算之得闊為勾弦和也

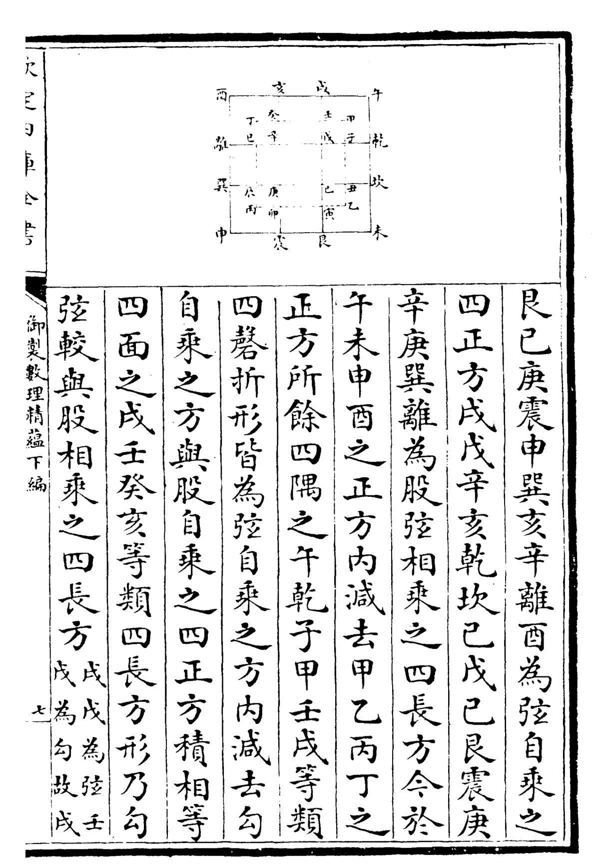
設如有勾弦較九尺勾股弦總和四十尺求勾股弦各幾何第三十五

法以勾股弦總和四十尺內減勾弦較九尺餘三十一尺為兩勾一股之共數蓋勾股弦總和為一勾一股一弦之共數內減勾弦較是於弦內減勾弦較即又得一勾矣故為兩勾一股也自乘得九百六十一尺又以勾股弦總和四十尺與勾弦較九



尺相加得四十九尺為兩弦一股之共數（益勾股弦總和為一勾一股一弦之共數令加勾弦較是於勾數加勾弦較即又得一弦矣故為兩弦一股也）自乘得二千四百零一尺兩數相減餘一千四百四十尺四歸之得三百六十尺為長方積乃以勾弦較九尺為長闊較用帶縱較數開方法算之得闊十五尺為股於勾股弦總和四十尺內減股十五尺餘二十五尺為勾弦和減勾弦較九尺餘十六尺折

半得八尺為勾加勾弦較九尺得十七尺為弦也如圖甲乙丙丁為兩勾一股自乘之一大正方内戊己庚辛為股自乘之一正方甲子戊壬丑乙寅己庚卯丙辰癸辛己丁為勾自乘之四正方壬戊辛癸子丑己戊己寅卯庚辛庚辰己為勾股相乘之四長方又午未申酉為兩弦一股自乘之一大正方内戊己庚辛為股自乘之一正方午乾戊戊坎未

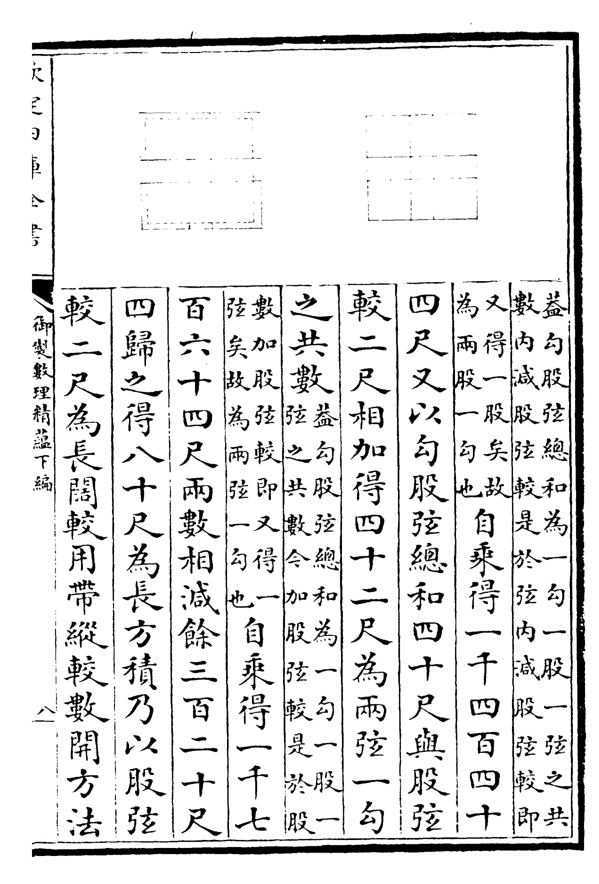


艮已庚震申巽亥辛離酉為弦自乘之四正方戊戊辛亥乾坎已戊已艮震庚辛庚巽離為股弦相乘之四長方令於午未申酉之正方內減去甲乙丙丁之正方所餘四隅之午乾子甲壬戊等類四磬折形皆為弦自乘之方內減去勾自乘之方與股自乘之四正方積相等四面之戊壬癸亥等類四長方形乃勾弦較與股相乘之四長方戊戊為弦壬戊為勾故戊

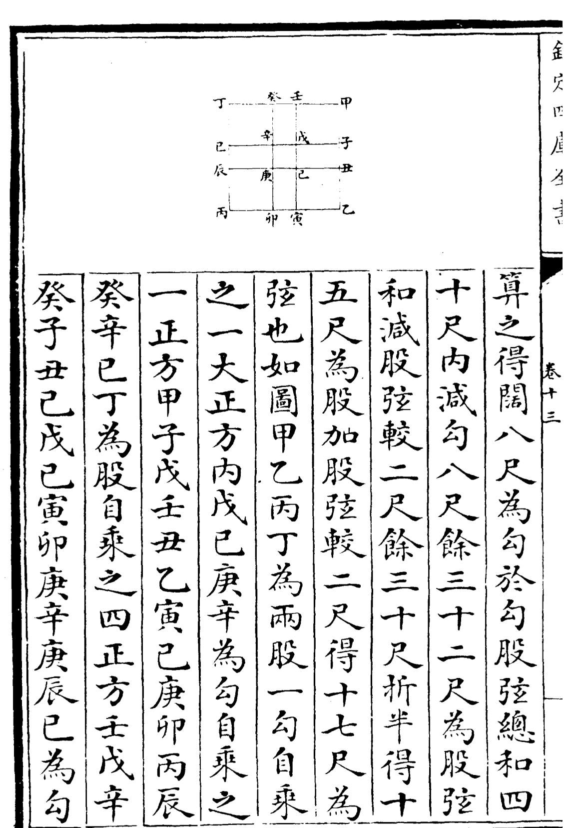
壬為勾弦較以四歸之則餘股自乘之一正方勾弦較與股相乘之一長方共為戊坤兌亥一長方其闊即股其長即股與勾弦較之和故以勾弦較為長闊較用帶縱較數開方法算之得闊為股也

設如有股弦較二尺勾股弦總和四十尺求勾股弦各幾何第三十六

法以勾股弦總和四十尺內減股弦較二尺餘三十八尺為兩股一勾之共數



葢勾股弦總和為一勾一股一弦之共數內減股弦較是於弦內減股弦較即又得一股矣故為兩股一勾也自乘得一千四百四十四尺又以勾股弦總和四十尺與股弦較二尺相加得四十二尺為兩弦一勾之共數葢勾股弦總和為一勾一股一弦之共數今加股弦較是於股數加股弦較即又得一弦矣故為兩弦一勾也自乘得一千七百六十四尺兩數相減餘三百二十尺四歸之得八十尺為長方積乃以股弦較二尺為長闊較用帶縱較數開方法



算之得闊八尺為勾於勾股弦總和四十尺內減勾八尺餘三十二尺為股弦和減股弦較二尺餘三十尺折半得十五尺為股加股弦較二尺得十七尺為弦也如圖甲乙丙丁為兩股一勾自乘之一大正方內戊已庚辛為勾自乘之一正方甲子戊壬丑乙寅已庚卯丙辰癸辛巳丁為股自乘之四正方壬戊辛癸子丑己戊己寅卯庚辛庚辰巳為勾

股相乘之四長方又午未申酉為兩弦一勾自乘之一大正方內戊己庚辛為勾自乘之一正方午乾戊戊坎未艮己庚震申巽亥辛離酉為弦自乘之四正方戊戊辛亥乾坎己戊己艮震庚辛庚巽離為勾弦相乘之四長方令於午未申酉之正方內減去甲乙丙丁之正方所餘四隅之午乾子甲壬戊等類四罄折形皆為弦自乘之方內減去股自乘

午 甲 子 乾 坎 丑 乙 未
戊 亥 壬 癸 戊 辛 己 庚 寅 卯 艮 震
酉 丁 巳 離 巽 辰 丙 申
戊壬 坤
亥癸 兌

之方與勾自乘之四正方積相等四面之戊壬癸亥等類四長方形乃股弦較與勾相乘之四長方（戊戊為弦壬戊為股故戊壬為股弦較）以四歸之則餘勾自乘之一正方股弦較與勾相乘之一長方共為戊坤兌亥一長方其闊即勾其長即勾與股弦較之和故以股弦較為長闊較用帶縱較數開方法算之得闊為勾也

設如有勾股和二十三尺弦與勾股較之較十尺求

勾股弦各幾何第三十七

法以勾股和二十三尺自乘得五百二十九尺又以勾股和二十三尺與弦與勾股較之較十尺相加得三十三尺為兩勾一弦之共數蓋弦與勾股較之較共數與勾股和相加則得兩勾一股一股弦較即弦故為兩勾一弦之共數也自乘得一千零八十九尺兩自乘數相減餘五百六十尺折半得二百八十尺為長方積乃以弦與勾股較之較

較十尺與兩勾一弦之共數三十三尺相加得四十三尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊八尺為勾於勾股和二十三尺内減勾八尺餘十五尺為股又於股十五尺内減勾八尺餘七尺為勾股較與弦與勾股較之較十尺相加得十七尺為弦也如圖甲乙丙丁為勾股和自乘之一大正方内戊己庚丁為股自乘之一正方辛乙壬己為勾自

癸 午 卯 寅
巽 離 震
亥 未 辰 坤 己
乾 申 酉 兌 戊
子 坎 艮 丑

乘之一正方甲辛巳戊與己壬丙庚為勾股相乘之二長方又癸子丑寅為兩勾一弦自乘之一大正方内卯辰巳寅為弦自乘之一正方未申酉辰亥乾申未乾子坎申申坎艮酉為勾自乘之四正方癸亥未午午未辰卯辰酉戌巳酉艮丑戌為勾弦相乘之四長方令以兩正方相減則是癸子丑寅方内減去離辰坤震股自乘之一正方即如前圖之

甲 辛 乙
戊 己 壬
丁 庚 丙

戊己庚丁然又未申酉辰勾自乘之一正方即如前圖之辛乙壬已然又巽未辰離辰酉兌坤勾股相乘之二長方即如前圖之甲辛已戊己壬丙庚然所餘之卯離震坤已寅一磬折形與勾自乘之一正方等弦自乘之正方內減股自乘之方則與勾自乘之方等再午巽離卯與坤兌戊己二小長方為股弦較與勾相乘之二長方若各補於勾自乘之二正方內即成勾與弦與

勾股較之較相乘二長方蓋弦與勾股較之較乃弦內減去勾股較之餘然弦內有一勾一勾股較一股弦較若減去勾股較則所餘為一勾一股弦較矣今以股弦較與勾相乘之長方補於勾自乘之正方內則其長為一勾一股弦較即弦與勾股較之較其闊即勾故為勾與弦與勾股較之較相乘之長方也合計之則為勾自乘二正方勾弦相乘二長方勾與弦與勾股較之較相乘二長方折半則餘勾自乘一正方勾弦相乘一長方勾與弦與勾股較之較相乘一長方之共積與金木水

金 木

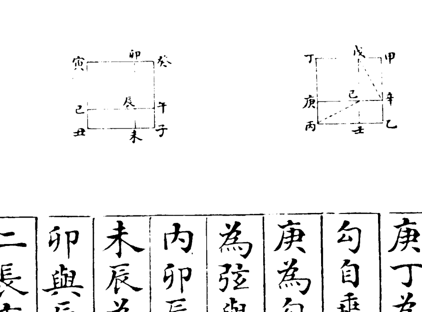
火 水

火長方形等其闊即勾其長為一勾一弦一弦與勾股較之較其長闊和為兩勾一弦一弦與勾股較之較故以弦與勾股較之較與兩勾一弦之共數相加用帶縱和數開方法算之得闊為勾也

設如有勾股和二十三尺弦與勾股較之和二十四尺求勾股弦各幾何 第三十八

法以勾股和二十三尺自乘得五百二十九尺又以弦與勾股較之和二十四

尺自乘得五百七十六尺兩數相加得一千一百零五尺為長方積乃以弦與勾股較之和二十四尺倍之得四十八尺為長闊較用帶縱較數開方法算之得十七尺為弦於弦與勾股較之和二十四尺內減弦十七尺餘七尺為勾股較於勾股和二十三尺內減勾股較七尺餘十六尺折半得八尺為勾加勾股較七尺得十五尺為股也如圖甲乙丙



丁為勾股和自乘之一大正方内戊己庚丁為股自乘之一正方辛乙壬己為勾自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚為勾股相乘之二長方又癸子丑寅為弦與勾股較之和自乘之一大正方内卯辰巳寅為弦自乘之一正方午子未辰為勾股較自乘之一正方癸午辰卯與辰未丑巳為勾股較與弦相乘之二長方兩大正方相併則得弦自乘三

亥　申
戌　酉

正方勾股較與弦相乘二長方共為申酉戌亥一長方形何也卯辰巳寅為一弦方戊己庚丁一股方與辛乙壬己一勾方相併為一弦方甲辛己戊己壬丙庚勾股相乘之二長方即四勾股積與午子未辰勾股較自乘之一正方相併又為一弦方癸午辰卯辰未丑巳即勾股較與弦相乘之二長方今二自乘方相加則戌申酉戌亥之一大長方其闊

即弦其長為三弦二勾股較其長闊較為二弦二勾股較故將弦與勾股較之和倍之為二弦二勾股較之共數用帶縱較數開方法算之得闊為弦也

設如有勾弦和二十五尺弦與勾股和之較六尺求勾股弦各幾何第三十九

法以勾弦和二十五尺自乘得六百二十五尺又以勾弦和二十五尺與弦與勾股和之較六尺相加得三十一尺為

兩勾一股之共數蓋勾弦和為一勾一弦之共數令於弦數內加弦與勾股和之較即為勾股和是為兩勾一股之共數矣與勾弦和二十五尺相乘得七百七十五尺兩數相減餘一百五十尺為長方積乃以勾弦和二十五尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得長十五尺為股於股十五尺內減弦與勾股和之較六尺餘九尺為勾弦較與勾弦和二十五尺相加得三十四尺折半得十七尺為弦內

減勾弦較九尺餘八尺為勾也如圖甲乙丙丁為勾弦和自乘之一大正方內戊己庚丁為弦自乘之一正方辛乙壬己為勾自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚為勾弦相乘之二長方又癸子丑寅為兩勾一股與勾弦和相乘之一大長方內卯辰巳寅為股自乘之一正方午未申卯與癸酉未午為勾與弦相乘之二長方與甲乙丙丁大正方內之

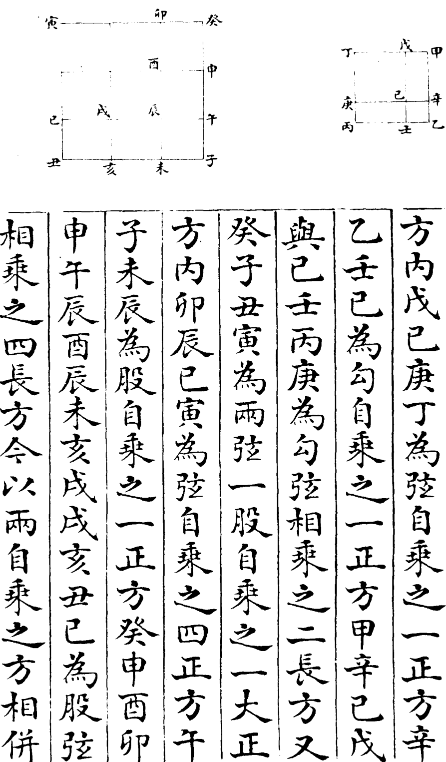
甲辛己戊巳壬丙庚二長方等未戌亥申為勾自乘之一正方與甲乙丙丁大正方內之辛乙壬巳一正方等而酉子戌未亦為勾自乘之一正方與卯辰巳寅股自乘之一正方相併乃與甲乙丙丁大正方內之戊巳庚丁弦自乘之一正方等兩數相減所餘為辰亥丑巳一長方其辰巳長即股其辰巳巳丑長闊和即勾弦和故以帶縱和數開方法算

之得長為股也

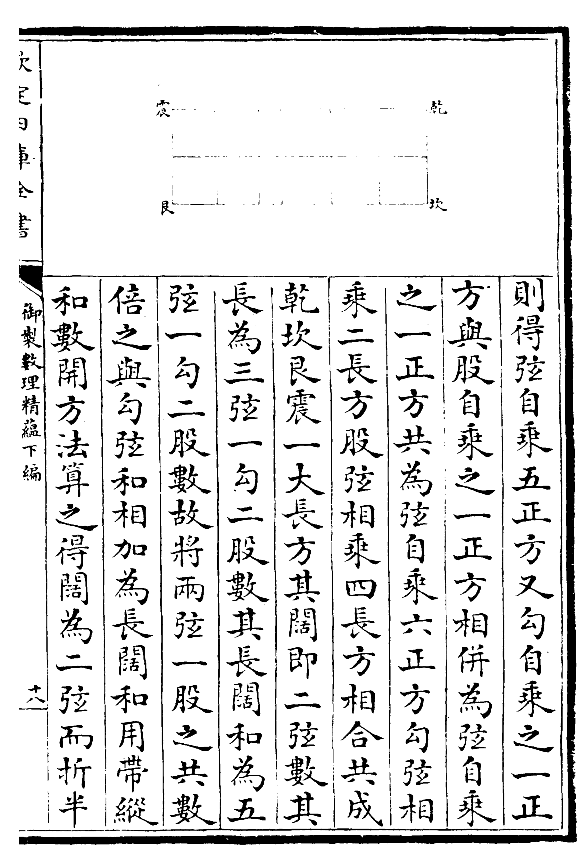
設如有勾弦和二十五尺弦與勾股較之和二十四尺求勾股弦各幾何第四十

法以勾弦和二十五尺自乘得六百二十五尺又以勾弦和二十五尺與弦與勾股較之和二十四尺相加得四十九尺為兩弦一股之共數蓋勾弦和加弦與勾股較之和則得兩弦一勾一勾股較兩勾加勾股較即股故為兩弦一股也自乘得二千四百零一尺兩自乘數相加得

三千零二十六尺為長方積乃以兩弦一股之共數倍之得九十八尺為四弦二股之共數與勾弦和相加得一百二十三尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊三十四尺折半得十七尺為弦於勾弦和二十五尺內減弦十七尺餘八尺為勾又於弦與勾股較之和二十四尺內減弦十七尺餘七尺為勾股較與勾八尺相加得十五尺為股也如



圖甲乙丙丁為勾弦和自乘之一大正方内戊己庚丁為弦自乘之一正方辛乙壬己為勾自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚為勾弦相乘之二長方又癸子丑寅為兩弦一股自乘之一大正方内卯辰巳寅為弦自乘之四正方午子未辰為股自乘之一正方癸申酉卯申午辰酉辰未亥戊戊亥丑巳為股弦相乘之四長方今以兩自乘之方相併



則得弦自乘五正方又勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併為弦自乘之一正方共為弦自乘六正方勾弦相乘二長方股弦相乘四長方相合共成乾坎艮震一大長方其闊即二弦數其長為三弦一勾二股數其長闊和為五弦一勾二股數故將兩弦一股之共數倍之與勾弦和相加為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊為二弦而折半

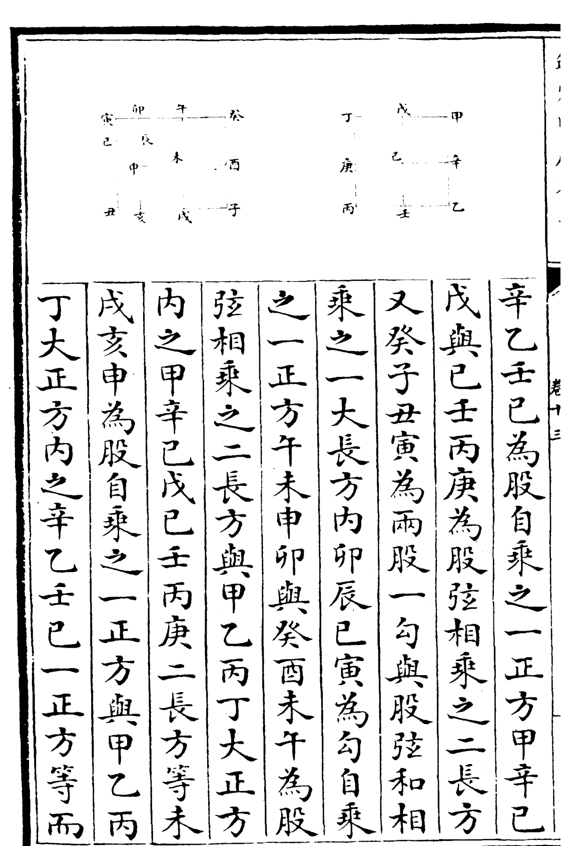
為弦也

設如有股弦和三十二尺弦與勾股和之較六尺求勾股弦各幾何　第四十一

法以股弦和三十二尺自乘得一千零二十四尺又以股弦和三十二尺與弦與勾股和之較六尺相加得三十八尺為兩股一勾之共數蓋股弦和為一股一弦之共數今於弦數內加弦與勾股和之較即為與股勾股和是為兩股一勾之共數矣與股弦和三十二尺相乘得一千二百一十

六尺兩數相減餘一百九十二尺為長方積乃以股弦和三十二尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊八尺為勾於勾八尺内減弦與勾股和之較六尺餘二尺為股弦較與股弦和三十二尺相加得三十四尺折半得十七尺為弦内減股弦較二尺餘十五尺為股也

如圖甲乙丙丁為股弦和自乘之一大正方内戊己庚丁為弦自乘之一正方

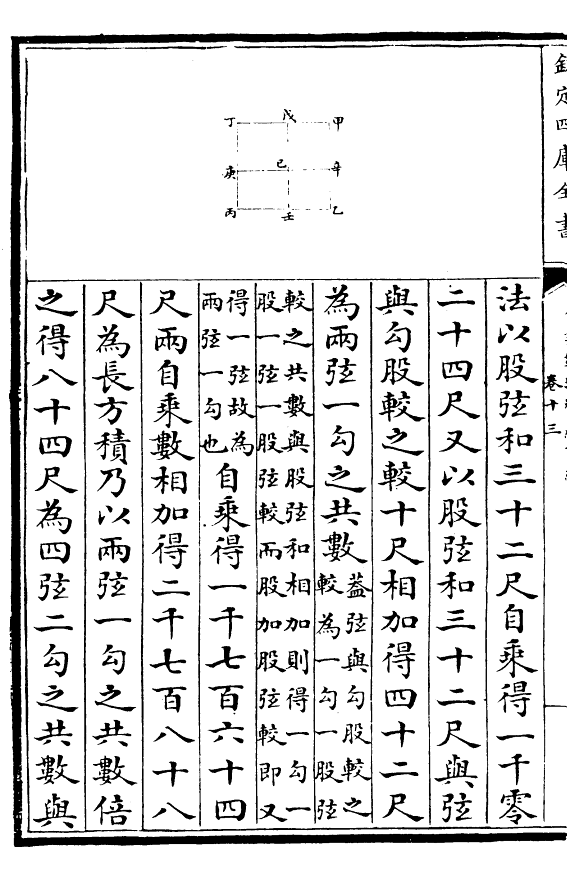


辛乙壬己為股自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚為股弦相乘之二長方又癸子丑寅為兩股一勾與股弦和相乘之一大長方內卯辰巳寅為勾自乘之一正方午未申卯與癸酉未午為股弦相乘之二長方與甲乙丙丁大正方內之甲辛己戊己壬丙庚二長方等未戌亥申為股自乘之一正方與甲乙丙丁大正方內之辛乙壬己一正方等而

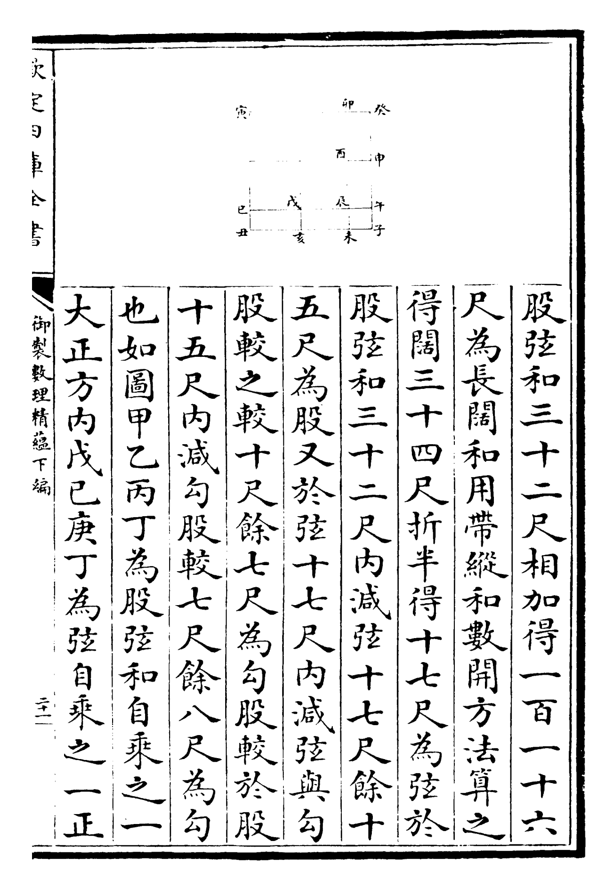
酉子戌未亦為股自乘之一正方與卯辰巳寅勾自乘之一正方相併乃與甲乙丙丁大正方內之戊巳庚丁弦自乘之一正方等兩數相減所餘為辰亥丑巳一長方其辰巳闊即勾其辰巳巳丑長闊和即股弦和故以帶縱和數開方法算之得闊為勾也

辰 巳 亥 丑

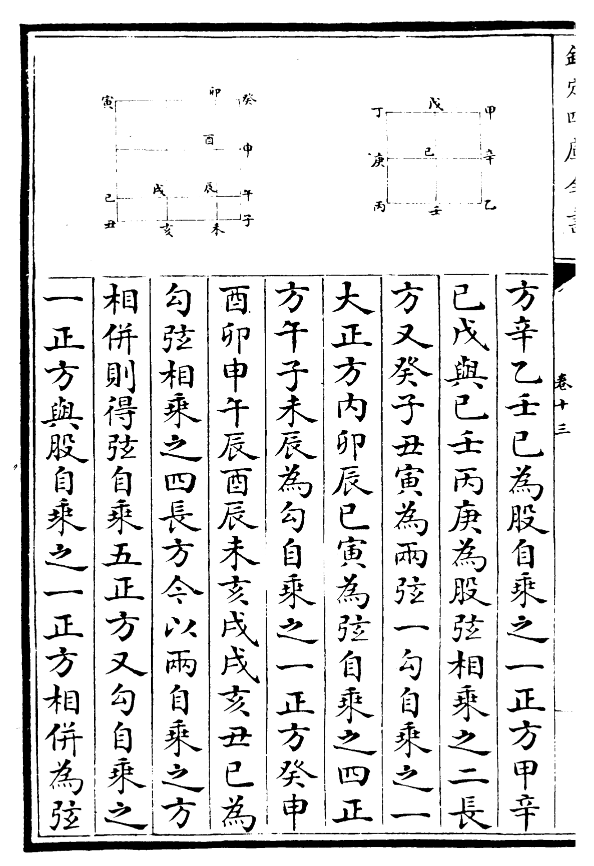
設如有股弦和三十二尺弦與勾股較之較十尺求勾股弦各幾何 第四十二



法以股弦和三十二尺自乘得一千零二十四尺又以股弦和三十二尺與弦與勾股較之較十尺相加得四十二尺為兩弦一勾之共數蓋弦與勾股較之較為一勾一股弦較之共數與股弦和相加則得一勾一股一弦一股弦較兩股加股弦較即又得一弦故為兩弦一勾也自乘得一千七百六十四尺兩自乘數相加得二千七百八十八尺為長方積乃以兩弦一勾之共數倍之得八十四尺為四弦二勾之共數與



股弦和三十二尺相加得一百一十六尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊三十四尺折半得十七尺為弦於股弦和三十二尺内減弦十七尺餘十五尺為股又於弦十七尺内減弦與勾股較之較十尺餘七尺為勾股較於股十五尺内減勾股較七尺餘八尺為勾也如圖甲乙丙丁為股弦和自乘之一大正方内戊已庚丁為弦自乘之一正



方辛乙壬己為股自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚為股弦相乘之二長方又癸子丑寅為兩弦一勾自乘之一大正方內卯辰己寅為弦自乘之四正方午子未辰為勾自乘之一正方癸申酉卯申午辰酉辰未亥戌戌亥丑己為勾弦相乘之四長方令以兩自乘之方相併則得弦自乘五正方又勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併為弦

乾　坎　震　艮

自乘之一正方共為弦自乘六正方股弦相乘二長方勾弦相乘四長方相合共成乾坎艮震一大長方其闊即二弦數其長為三弦一股二勾數其長闊和為五弦一股二勾數故將兩弦一勾之共數倍之與股弦和相加為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊為二弦而折半為弦也

設如有勾股較七尺弦與勾股和之較六尺求勾股

弦各幾何第四
十三

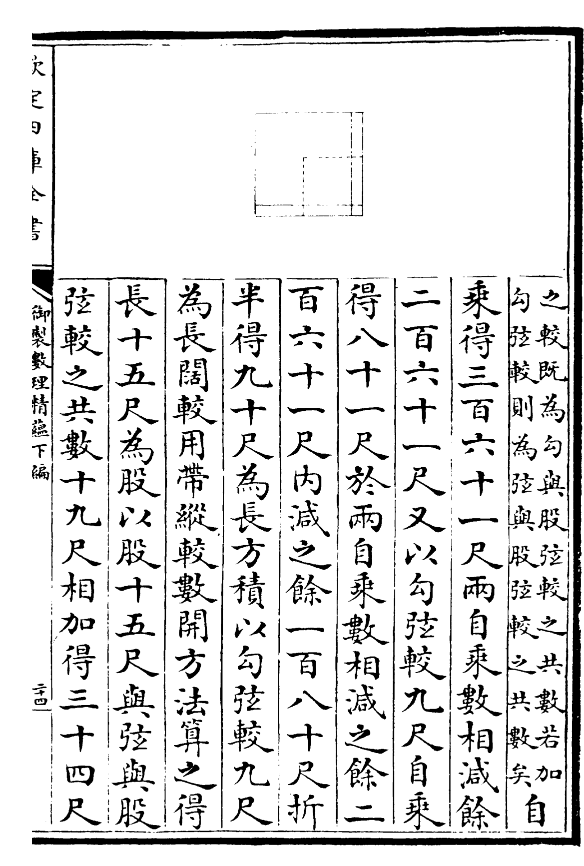
法以弦與勾股和之較六尺自乘得三十六尺折半得十八尺為長方積以勾股較七尺為長闊較用帶縱較數開方法算之得二尺為股弦較與弦與勾股和之較六尺相加得八尺為勾加勾股較七尺得十五尺為股再加股弦較二尺得十七尺為弦也如圖甲乙丙丁為弦自乘之一正方戊已丙庚為股自乘

之一正方甲壬癸辛為勾自乘之一正方戊丑癸子為弦與勾股和之較自乘之一正方其積與壬乙己丑辛子庚丁之勾弦較與股弦較相乘之二長方等（見前有勾弦較股弦較求勾股弦法）令以弦與勾股和之較自乘折半必與壬乙己丑一長方積相等其乙己闊即股弦較其壬乙長即勾弦較而勾弦較之中有一股弦較一勾股較故以勾股較為長闊較用帶縱

較數開方法算之得闊為股弦較也

設如有勾弦較九尺弦與勾股較之較十尺求勾股弦各幾何第四十四

法以弦與勾股較之較十尺為勾與股弦較之共數蓋弦與勾股較之較乃弦內減去勾股較之餘然弦內有一勾一勾股較一股弦較今減去勾股較故餘為勾與股弦較之共數也自乘得一百尺又以勾弦較九尺與弦與勾股較之較十尺相加得十九尺為弦與股弦較之共數蓋勾加勾弦較即弦今弦與勾股較



之較既為勾與股弦較之共數若加勾弦較則為弦與股弦較之共數矣自乘得三百六十一尺兩自乘數相減餘二百六十一尺又以勾弦較九尺自乘得八十一尺於兩自乘數相減之餘二百六十一尺內減之餘一百八十尺折半得九十尺為長方積以勾弦較九尺為長闊較用帶縱較數開方法算之得長十五尺為股以股十五尺與弦與股弦較之共數十九尺相加得三十四尺

折半得十七尺為弦内減勾弦較九尺餘八尺為勾也如圖甲乙丙丁為勾與股弦較相和自乘之一大正方内戊己庚丁為勾自乘之一正方辛乙壬己為股弦較自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚為股弦較與勾相乘之二長方又癸子丑寅為弦與股弦較相和自乘之一大正方内卯辰巳寅為弦自乘之一正方午子未辰為股弦較自乘之一

癸 卯 寅
申 酉 戌
午子 辰 亥 巳
未 乾 丑

正方即如前圖之辛乙壬巳然癸午辰卯與辰未丑巳為股弦較與弦相乘之二長方兩自乘方相減則於癸子丑寅正方形內減去與甲乙丙丁正方形相等之申子乾戌正方形餘卯酉戌亥巳寅磬折形為弦自乘方內減去勾自乘方所餘之股自乘之方積其癸申酉卯與亥乾丑巳為勾弦較與股弦較相乘之二長方共積與弦與勾股和之較自

乘之正方等今以卯酉戌亥巳寅磬折形變為股自乘之方作一坎艮震巽正方形又以癸申酉卯亥乾丑巳二長方共積變為弦與勾股和之較自乘之方作一巽離坤兑正方形則此二正方邊之較即勾弦較（並見勾弦較股弦較求勾股弦法中）是以坎艮震巽股自乘之正方形內減去水艮金木勾弦較自乘之正方則餘坎水木金震巽一磬折形而此磬折形內火

坎水　艮
火　木　金
巽　離　震
兌　坤

木離巽之一正方形與巽離坤兌之正方形等是則坎水木金震巽磬折形與巽離坤兌正方形相合共為坎水離巽類之二長方矣折半則為一長方其闊即弦與勾股和之較其長即股其長闊較即勾弦較故以勾弦較為長闊較用帶縱較數開方法算之得長為股也

又法以弦與勾股較之較十尺為勾與股弦較之共數與勾弦較九尺相加得

丁 戊 甲
丙 己 乙

十九尺為弦與股弦較之共數兩數相併得二十九尺為一勾一弦二股弦較之共數與勾弦較九尺相乘得二百六十一尺又以勾弦較九尺自乘得八十一尺兩積相減餘一百八十尺折半得九十尺為長方積以勾弦較九尺為長闊較用帶縱較數開方法算之得長十五尺為股與弦與股弦較之共數十九尺相加得三十四尺折半得十七尺為

弦內減勾弦較九尺餘八尺為勾也如圖甲乙丙丁為勾弦較與一勾一弦二股弦較相乘之長方內甲乙已戊為勾弦較與勾弦和相乘之一長方與庚辛壬癸股自乘之一正方積等見股與勾弦較求勾弦法中戊已丙丁為勾弦較與股弦較相乘之二長方與癸子丑寅弦與勾股和之較自乘之一正方積等此二正方邊之較即勾弦較並見勾弦較股弦較求勾股弦法中是以

庚辛壬癸股自乘之正方形內減去卯辛巳辰勾弦較自乘之正方則餘庚卯辰巳壬癸一磬折形而此磬折形內午辰子癸之一正方與癸子丑寅之正方形等庚卯辰午之一長方與辰巳壬子之長方形等折半即餘庚卯子癸一長方形其闊即弦與勾股和之較其長即股其長闊較即勾弦較故以勾弦較為長闊較用帶縱較數開方法算之得長

為股也

設如有股弦較二尺弦與勾股較之和二十四尺求勾股弦各幾何第四十五

法以弦與勾股較之和二十四尺減股弦較二尺餘二十二尺為股與勾股較之共數蓋弦內減股弦較餘即股故於弦與勾股較之和內減股弦較餘即為股與勾股較之共數也自乘得四百八十四尺又以弦與勾股較之和二十四尺自乘得五百七十六尺兩自乘數相減餘九

戊 甲 丁 己 辛 庚 丙 壬 乙

十二尺又於股與勾股較之共數自乘之四百八十四尺內減兩自乘數相減所餘之九十二尺餘三百九十二尺為長方積乃以股與勾股較之共數二十二尺倍之得四十四尺內減股弦較二尺餘四十二尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊十四尺折半得七尺為勾股較於弦與勾股較之和二十四尺內減勾股較七尺餘十七尺為弦於

弦内減股弦較二尺餘十五尺為股於股内減勾股較七尺餘八尺為勾也如圖甲乙丙丁為股與勾股較相和自乘之一大正方内戊己庚丁為股自乘之一正方辛乙壬已為勾股較自乘之一正方甲辛已戊與已壬丙庚為勾股較與股相乘之二長方又癸子丑寅為弦與勾股較相和自乘之一大正方内卯辰已寅為弦自乘之一正方午子未辰

為勾股較自乘之一正方即如前圖之辛乙壬己然癸午辰卯與辰未丑己為勾股較與弦相乘之二長方兩自乘方相減則於癸子丑寅正方形內減去與甲乙丙丁正方形相等之申子乾戌正方形所餘卯酉戌亥巳寅磬折形為弦自乘方內減去股自乘方所餘之勾自乘之方積其癸申酉卯與亥乾丑巳為勾股較與股弦較相乘之二長方今以

甲巽　戊　坎　丁
離　坤
水　火　兌　艮　震
木　辛　巳　庚
金　乙　壬　丙

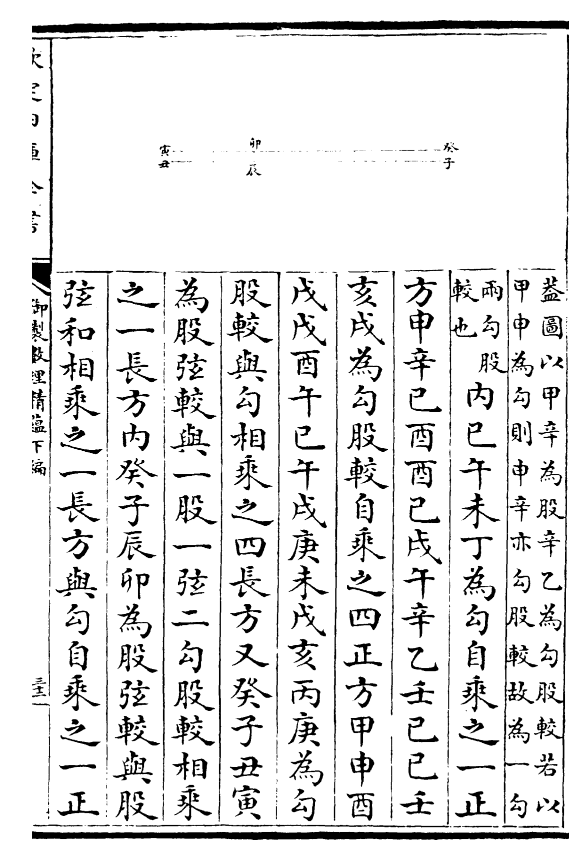
此餘積再於甲乙丙丁正方形內減之則減去坎艮震丁勾自乘之一正方其積與卯酉戌亥巳寅磬折形等又甲巽離戊與戊離坤坎二長方即如癸申酉卯亥乾丑巳二長方然所餘兌巳庚震與巳壬丙庚為股與勾股較相乘之二長方火辛巳兌與辛乙壬巳為勾股較自乘之二正方巽火兌離與離兌艮坤為勾與股弦較之較與勾股較相乘之

丁 坎 戊 甲巽 水
坤 離 火
癸 艮 兌 木
庚 己 辛 金
丙 壬 乙

二長方試將巽火兌離離兌艮坤二長方移為水木辛火木金乙辛則成水金丙震一大長方形其闊即二勾股較其長即二股內少一股弦較其長闊和為二勾股較二股少一股弦較故以股與勾股較之共數倍之得二股二勾股較內減去一股弦較為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊為二勾股較折半得勾股較也

又法以弦與勾股較之和二十四尺減股弦較二尺餘二十二尺為股與勾股較之共數自乘得四百八十四尺又以弦與勾股較之和二十四尺與股與勾股較之共數二十二尺相加得四十六尺為一股一弦二勾股較之共數以股弦較二尺乘之得九十二尺兩數相減餘三百九十二尺為長方積乃以股與勾股較之共數二十二尺倍之得四十

四尺內減股弦較二尺餘四十二尺為長闊和用帶縱和數開方法算之得闊十四尺折半得七尺為勾股較於弦與勾股較之和二十四尺內減勾股較七尺餘十七尺為弦於弦內減股弦較二尺餘十五尺為股於股內減勾股較七尺餘八尺為勾也如圖甲乙丙丁為股與勾股較相和自乘之一大正方亦即一勾二勾股較之共數自乘之正方也

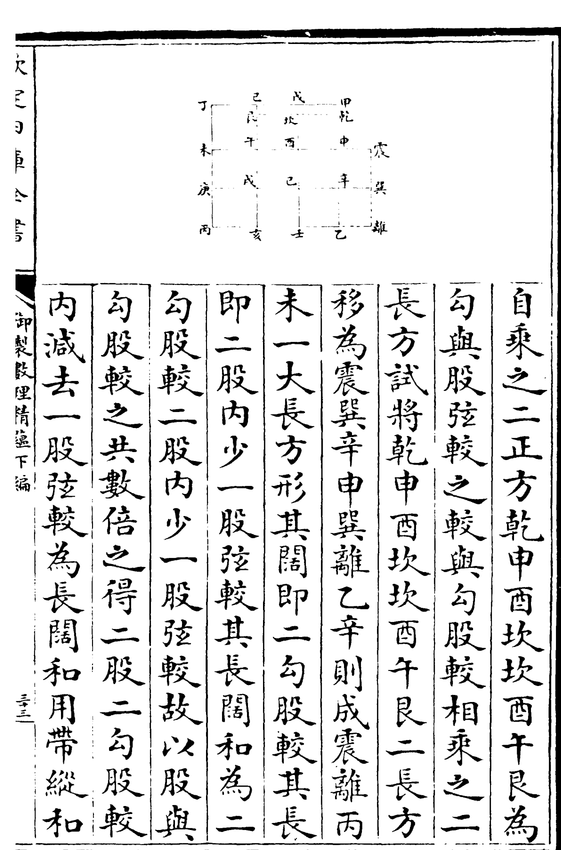


益圖以甲辛為股辛乙為勾股較若以甲申為勾則申辛亦勾股較故為一勾兩勾股較也

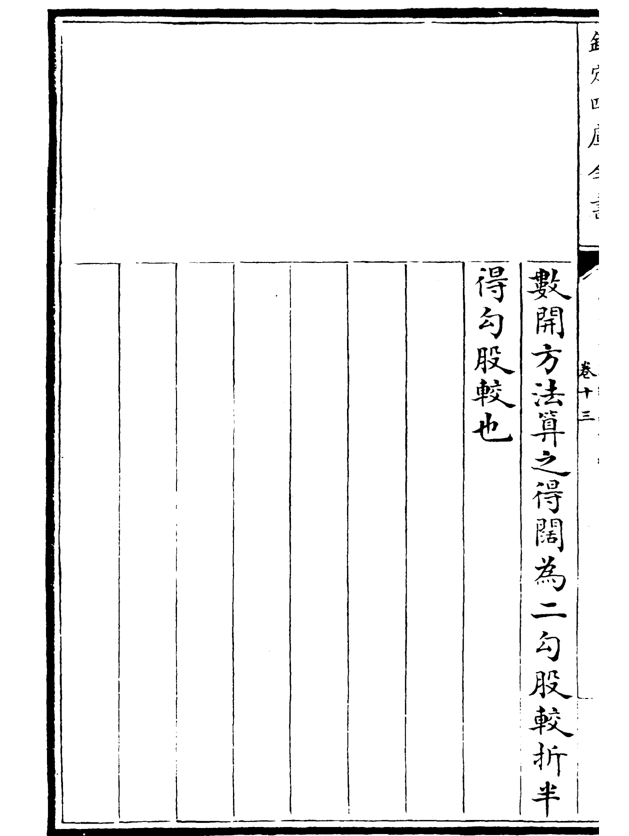
股內已午未丁為勾自乘之一正方申辛已酉酉已戌午辛乙壬已已壬亥戌為勾股較自乘之四正方甲申酉戌戌酉午已午戌庚未戌亥丙庚為勾股較與勾相乘之四長方又癸子丑寅為股弦較與一股一弦二勾股較相乘之一長方內癸子辰卯為股弦較與股弦和相乘之一長方與勾自乘之一正

寅 卯 癸
丑 辰 子

方等見勾與股弦較求股弦法中卯辰丑寅為股弦較與二勾股較相乘之二長方今以兩積相減則於甲乙丙丁正方形內減去與癸子辰卯相等之己午未丁之勾自乘之一正方又減去與卯辰丑寅相等之甲乾坎戊戊坎艮己之股弦較與二勾股較相乘之二長方所餘酉己庚未與己壬丙庚為股與勾股較相乘之二長方申辛己酉與辛乙壬己為勾股較



自乘之二正方乾申酉坎坎酉午艮為勾與股弦較之較與勾股較相乘之二長方試將乾申酉坎坎酉午艮二長方移為震巽辛申巽離乙辛則成震離丙未一大長方形其闊即二勾股較其長即二股内少一股弦較其長闊和為二勾股較二股内少一股弦較故以股與勾股較之共數倍之得二股二勾股較内減去一股弦較為長闊和用帶縱和



數開方法算之得闊為二勾股較折半得勾股較也

勾股積與勾股弦和較相求法

設如有勾股積一百二十尺勾十尺求股弦各幾何

法以勾股積一百二十尺倍之得二百四十尺以勾十尺除之得二十四尺為股勾股求弦得弦二十六尺如圖甲乙丙勾股形積倍之成甲乙丙丁長方形積其闊即勾其長即股故以勾除倍積而得股也

設如有勾股積六十尺股十五尺求勾弦各幾何

法以勾股積六十尺倍之得一百二十尺以股十五尺除之得八尺為勾勾股求弦得弦十七尺如圖甲乙丙勾股形積倍之成甲乙丙丁長方形積其長即股其闊即勾故以股除倍積而得勾也

丁 甲 丙 乙

設如有勾股積三十尺弦十三尺求勾股各幾何

法以勾股積三十尺四因之得一百二十尺又以弦十三尺自乘得一百六十九尺相減餘四十九尺開方得七尺為

勾股較乃以勾股積倍之為長方積以勾股較為長闊較用帶縱較數開方法算之得闊五尺為勾得長十二尺為股如圖甲乙丙丁為弦自乘之方内容甲戊乙乙己丙丙庚丁丁辛甲四勾股積戊己庚辛一勾股較自乘方積故於弦自乘方内減四勾股積即餘勾股較自乘之方而開方得勾股較也

設如有勾股積六十尺勾股較七尺求勾股弦各幾

何

丁　甲
丙　乙

法以勾股積六十尺倍之得一百二十尺以勾股較七尺為長闊較用帶縱較數開方法算之得闊八尺為勾加勾股較七尺得十五尺為股勾股求弦得弦十七尺如圖甲乙丙勾股形積倍之成甲乙丙丁長方形積其闊即勾其長即股其長闊較即勾股較故用帶縱較數開方法算之得闊為勾也又如有勾股

積幾何知勾弦較或股弦較求勾股弦

法中用帶縱立方算之始得茲故不設

設在帶縱立方之後

設如有勾股積六十尺勾股和二十三尺求勾股弦

各幾何

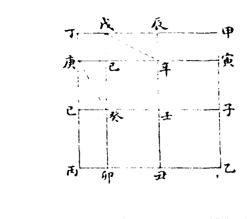
法以勾股積六十尺八因之得四百八十尺又以勾股和二十三尺自乘得五百二十九尺兩數相減餘四十九尺開方得七尺為勾股較於勾股和二十三

尺内減勾股較七尺餘十六尺折半得八尺為勾加勾股較七尺得十五尺為股勾股求弦得弦十七尺如圖甲乙丙丁為勾股和自乘之方内容八勾股積一勾股較自乘方積令於勾股和自乘之方内減八勾股積所餘戊己庚辛正方即勾股較自乘之方故開方而得勾股較也又如有勾股積幾何知勾弦和或股弦和求勾股弦法中用帶縱立方

算之始得茲故不設設在帶縱立方之後

設如有勾股積六十尺勾股弦總和四十尺求勾股弦各幾何

法以勾股積六十尺四因之得二百四十尺又以勾股弦總和四十尺自乘得一千六百尺兩數相減餘一千三百六十尺折半得六百八十尺以勾股弦總和四十尺除之得十七尺為弦於勾股

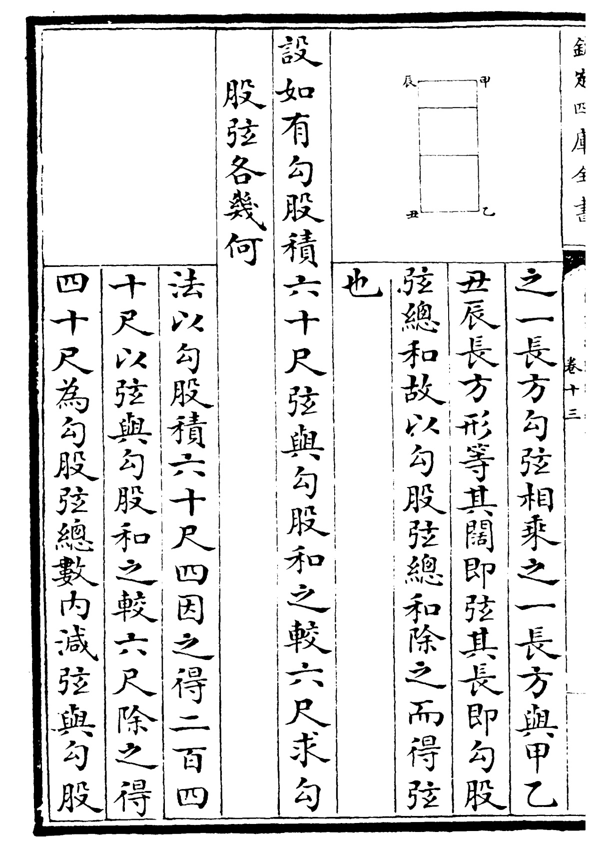


弦總和四十尺內減弦十七尺餘二十三尺為勾股和用有弦有勾股和求勾股法算之得勾八尺股十五尺如圖甲乙丙丁為勾股弦總和自乘之一大正方內戊己庚丁為勾自乘之一正方辛壬癸己為股自乘之一正方子乙丑壬為弦自乘之一正方寅子壬辛與壬丑卯癸為股弦相乘之二長方甲寅辛辰與癸卯丙已為勾弦相乘之二長方辰

辰 甲 丑 乙

辛己戊與己癸己庚為勾股相乘之二長方夫勾股相乘之二長方與四勾股積等今於勾股弦總和自乘之一大正方内減去四勾股積即減去勾股相乘之二長方而勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併又與弦自乘之一正方等故所餘者為弦自乘之二正方股弦相乘之二長方勾弦相乘之二長方折半即得弦自乘之一正方股弦相乘

之一長方勾弦相乘之一長方與甲乙丑辰長方形等其闊即弦其長即勾股弦總和故以勾股弦總和除之而得弦也



設如有勾股積六十尺弦與勾股和之較六尺求勾股弦各幾何

法以勾股積六十尺四因之得二百四十尺以弦與勾股和之較六尺除之得四十尺為勾股弦總數內減弦與勾股

和之較六尺餘三十四尺折半得十七尺為弦加弦與勾股和之較六尺得二十三尺為勾股和用有弦有勾股和求勾股法算之得股十五尺勾八尺如圖甲乙為勾股和丙乙為弦甲丙為弦與勾股和之較試依甲乙線作甲丁戊乙勾股和自乘之一正方又以丙乙線作丙己庚乙弦自乘之一正方二方相較其甲丁戊庚己丙磬折形乃與四勾股

積相等蓋勾股和自乘方內容八勾股積一勾股較自乘方積弦自乘方內容四勾股積一勾股較自乘方積二方相減所餘磬折形積與四勾股積相等引而長之即如丙甲戊庚一長方形其闊即弦與勾股和之較其長即弦與勾股和之和故以弦與勾股和之較除之得勾股弦總數也

設如有勾股積六十尺弦與勾股較之和二十四尺求勾股弦各幾何

法以勾股積六十尺四因之得二百四

十尺又以弦與勾股較之和二十四尺自乘得五百七十六尺兩數相減餘三百三十六尺折半得一百六十八尺用弦與勾股較之和二十四尺除之得七尺為勾股較於弦與勾股較之和二十四尺內減勾股較七尺餘十七尺為弦用有弦有勾股較求勾股法算之得勾八尺股十五尺如圖甲乙丙丁為弦與勾股較之和自乘之一正方甲戊己庚

為弦自乘之一正方而弦自乘之方内容四勾股積一勾股較自乘方積今減去四勾股積餘辛壬癸子為勾股較自乘之一正方而已丑丙寅亦為勾股較自乘之一正方再戊乙丑己與庚己寅丁又為勾股較與弦相乘之二長方折半則餘戊乙丑己一長方己丑丙寅一正方其戊寅長即弦與勾股較之和其戊乙闊即勾股較故以弦與勾股較之

和除之而得勾股較也

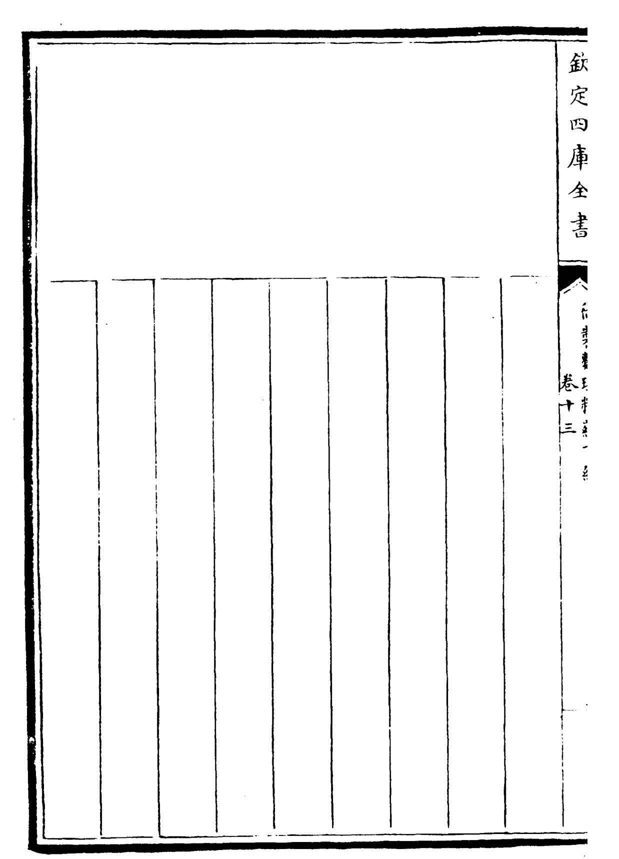
設如有勾股積六十尺弦與勾股較之較十尺求勾股弦各幾何

法以勾股積六十尺四因之得二百四十尺又以弦與勾股較之較十尺自乘得一百尺兩數相減餘一百四十尺折半得七十尺以弦與勾股較之較十尺除之得七尺為勾股較與弦與勾股較之較十尺相加得十七尺為弦用有弦

甲　戊　丁
辛　己　庚
乙　壬　丙

有勾股較求勾股法算之得勾八尺股十五尺如圖甲乙丙丁為弦自乘之一大正方内丁戊己庚為勾股較自乘之一正方辛乙壬己為弦與勾股較之較自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚為勾股較與弦與勾股較之較相乘之二長方益弦自乘方内容四勾股積一勾股較自乘方積今丁戊己庚既為勾股較自乘之方若於甲乙丙丁弦自乘

方內減之則所餘甲乙丙庚己戊磬折形即與四勾股積相等又於四勾股積相等之甲乙丙庚己戊磬折形內減辛乙壬己弦與勾股較之較自乘之方則尚餘甲辛己戊己壬丙庚二長方折半則得己壬丙庚一長方其己壬長即弦與勾股較之較其己庚闊即勾股較故以弦與勾股較之較除之而得勾股較也



正勾股比例

設如有正勾股知勾十二尺求股與弦各幾何

法以正勾股定分之勾三分為一率股四分為二率令所設之勾一十二尺為三率推得四率十六尺為股仍以勾三分為一率弦五分為二率令所設之勾十二尺為三率推得四率二十尺為弦也葢大小兩同式形其相當各界互相比之比例俱為相當比例四率見幾何原本八

一率 三分
二率 五分
三率 十二尺
四率 二十尺

卷第三節 故正勾股定分之勾三與股四之比即同於令所設之勾十二與股十六之比又正勾股定分之勾三與弦五之比亦同於令所設之勾十二與弦二十之比也

又捷法以勾十二尺用正勾股定分之勾三分除之得四尺即知令所設之勾股形為加四倍之比例乃以正勾股定分之股四分弦五分各加四倍即得所

求之股弦之各數矣

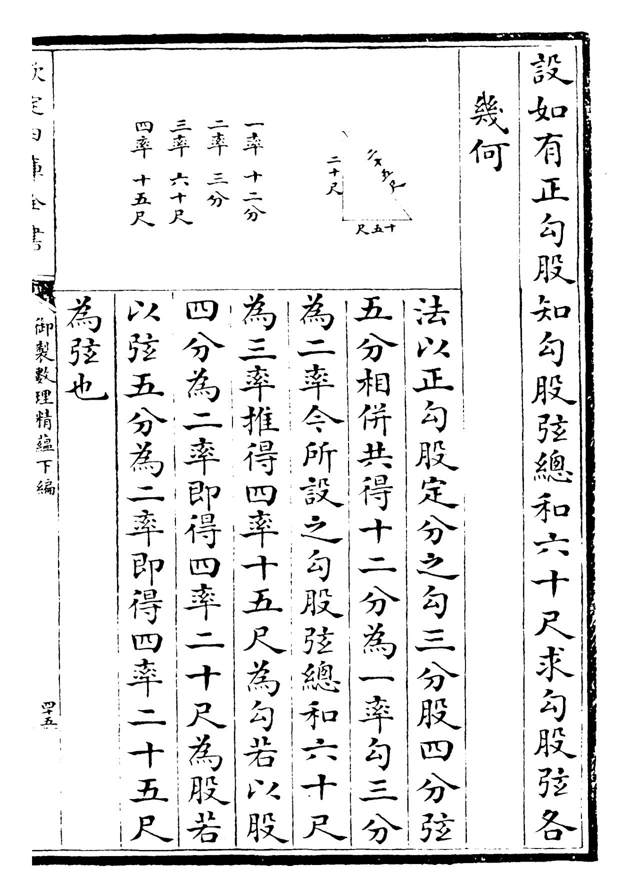
設如有正勾股知勾股和六十三尺求勾股弦各幾何

法以正勾股定分之勾三分股四分相併得七分為一率勾三分為二率今所設之勾股和六十三尺為三率推得四率二十七尺為勾若以股四分為二率即得四率三十六尺為股若以弦五分為二率即得四率四十五尺為弦也蓋

四十五尺
三十六尺
二十七尺

正勾股定分之勾股和七尺與勾三股四弦五各相為比即同於今所設之勾股和六十三尺與勾二十七尺股三十六尺弦四十五尺各相比之比例也

又捷法以勾股和六十三尺用正勾股定分之勾三股四相和之七分除之得九尺即知今所設之勾股形為加九倍之比例乃以正勾股定分之勾三股四弦五各加九倍即得所求之各數也



設如有正勾股知勾股弦總和六十尺求勾股弦各幾何

法以正勾股定分之勾三分股四分弦五分相併共得十二分為一率勾三分為二率令所設之勾股弦總和六十尺為三率推得四率十五尺為勾若以股四分為二率即得四率二十尺為股若以弦五分為二率即得四率二十五尺為弦也

二十尺
二十五尺
十五尺

又捷法以勾股弦總和六十尺用正勾股定分之勾三股四弦五相併之十二分除之得五尺即知今所設之勾股形為加五倍之比例乃以正勾股定分之勾三股四弦五各加五倍即得所求之各數也

設如有正勾股勾九尺股十二尺求內容方邊幾何

法以股十二尺七歸三因得五尺一寸四分二釐八豪有餘或以勾九尺七歸

四因亦得五尺一寸四分二釐八豪有餘為內容方邊也蓋勾三分股四分者則以勾股和七分為一率勾三分為二率股四分為三率推得四率為內容方邊是內容方邊得股七分之三得勾七分之四也令九尺與十二尺之比仍同於三分與四分之比故以其分數相求得內容方邊仍為比例四率也

設如有正勾股勾九尺股十二尺求內容圜徑幾何

法以股十二尺折半得六尺或以勾九尺取其三分之二亦得六尺即為內容圜徑也蓋勾三分股四分弦五分者則於勾股和七分內減弦五分餘二分為內容圜徑見勾股容圜第二法是內容圜徑得股四分之二得勾三分之二也令九尺與十二尺之比同於三分與四分之比故十二尺與六尺之比仍同於四與二之比而九尺與六尺之比亦仍同於三與

二之比也

設如有正勾股知勾股和二十一尺求內容方邊幾何

法以正勾股定分比例得勾九尺股十二尺以勾九尺七歸四因或以股十二尺七歸三因得五尺一寸四分二釐八毫有餘即內容方邊也葢內容方邊得勾七分之四得股七分之三法見前故必先比例得勾數或股數復比例得內容

方邊也

設如有正勾股知勾股和二十一尺求內容圜徑幾何

一率　七分
二率　二分
三率　二十一尺
四率　六尺

法以正勾股定分之勾三分股四分相加之七分為一率內容圜徑二分為二率令所設之勾股和二十一尺為三率推得四率六尺即內容圜徑也葢勾三分股四分弦五分者其內容圜徑為二分見前法故勾股和之七分與內容圜徑



二分之比即同於今所設之勾股和之二十一尺與內容圜徑六尺之比也總之正勾股形知一數即得所求之各數要先以勾三股四弦五求得所知之定分及所求之定分如勾股較則以勾三分與股四分相減餘一分又如弦與勾股較之和則以勾股較一分與弦五分相加得六分之類乃以所知之定分與所求之定分之比即同於今所知之數與今所求之數之比也

設如有正勾股面積九十六尺求勾股弦各幾何

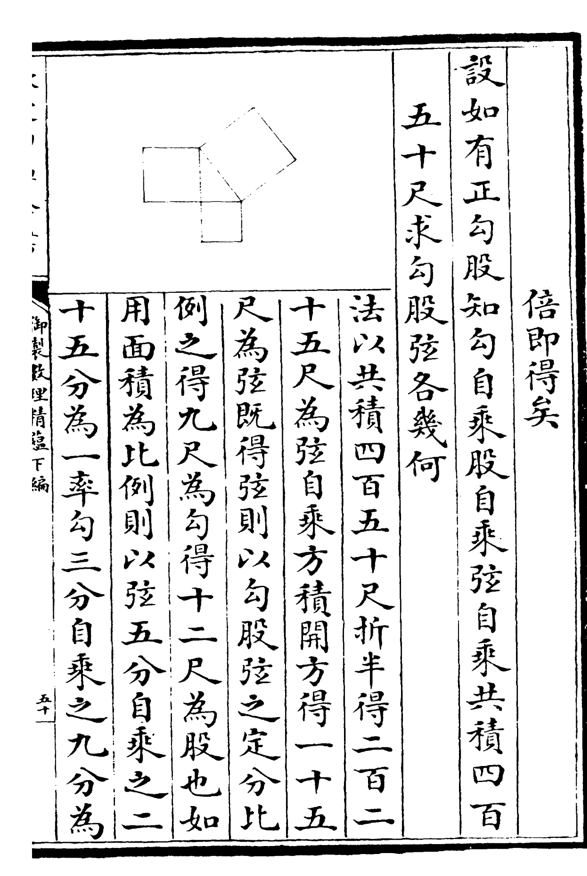
一率　六分
二率　九分
三率　九十六尺
四率　一百四十四尺

法以正勾股定分之面積六分為一率勾三分自乘得九分為二率今所設之勾股積九十六尺為三率推得四率一百四十四尺為勾自乘之方開方得十二尺為勾如以正勾股定分之股四分自乘為二率則得今所設之股自乘之方如以正勾股定分之弦五分自乘為二率則得今所設之弦自乘之方各開

方而即得各數矣或得勾而以正勾股定分之勾股弦各比例之亦可葢同式兩勾股形其面積互相為比即同於勾股形各相當界所作正方形互相為比見幾何原本八卷第四節故以正勾股定分之面積六尺與勾股弦各方之比即同於今所設之面積九十六尺與勾股弦各方之比也

又捷法以面積九十六尺用正勾股定

分之面積六尺除之得十六尺開方得四尺即知令所設之勾股弦為各加四倍之比例乃以正勾股定分之各數各加四倍即得各數益兩直角方面形其兩方面之比例比之兩界之比例為連比例隔一位相加之比例見幾何原本七卷第五節令勾股為長方之半正方與正方為比長方與長方為比其比例相同並見第六節故積大十六倍者界必大四倍既知其大四倍則以正勾股之定分各加四

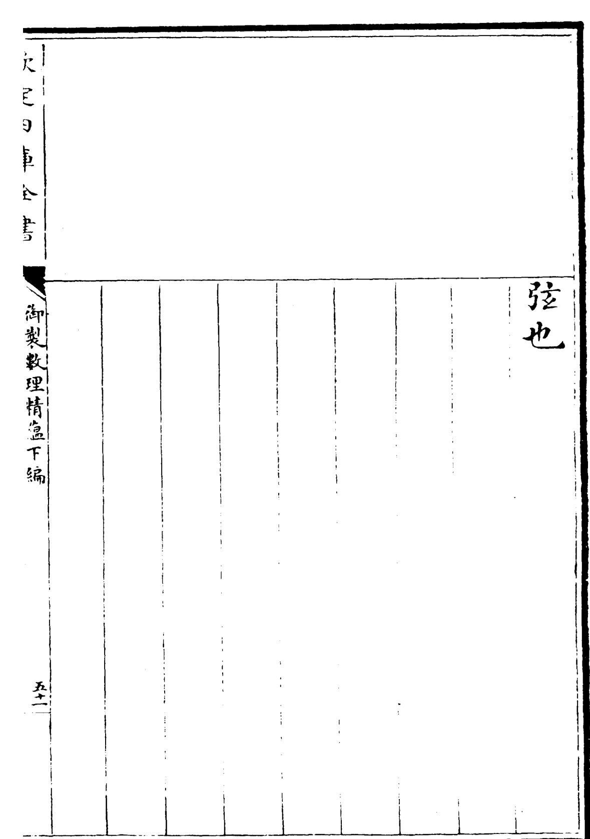


倍即得矣

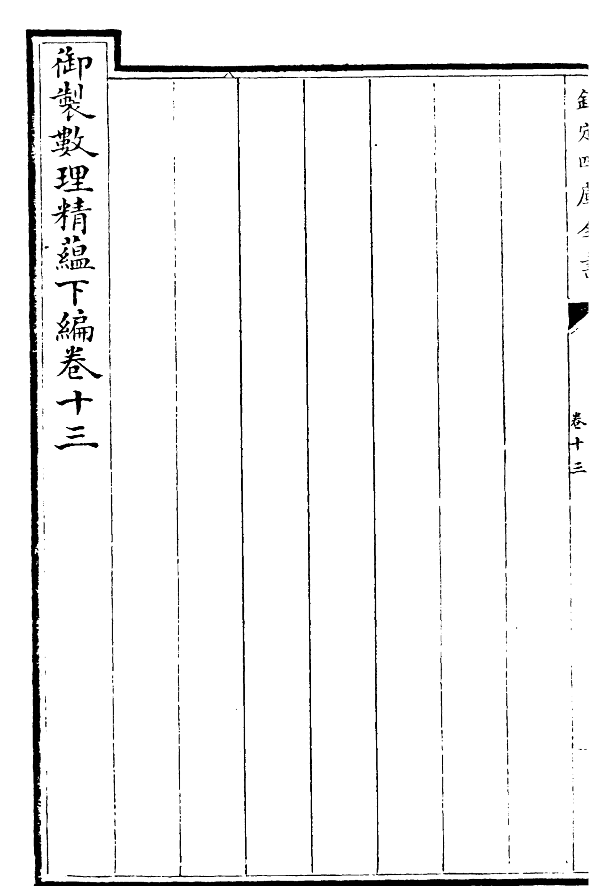
設如有正勾股知勾自乘股自乘弦自乘共積四百五十尺求勾股弦各幾何

法以共積四百五十尺折半得二百二十五尺為弦自乘方積開方得一十五尺為弦既得弦則以勾股弦之定分比例之得九尺為勾得十二尺為股也如用面積為比例則以弦五分自乘之二十五分為一率勾三分自乘之九分為

二率令所得之弦自乘方二百二十五尺為三率求得四率八十一尺為勾自乘方積開方得九尺為勾若以股四分自乘之十六分為二率則得四率一百四十四尺為股自乘方積開方得十二尺為股也蓋弦自乘之一方既與勾自乘股自乘之二方等則勾自乘股自乘弦自乘之三方必與弦自乘之二方等故折半即得弦自乘之一方而開方得



弦也


御製數理精藴下編卷十三

總校官庶吉士臣張能照

校對官中官正臣郭長發

謄録監生臣王　淦

繪圖監生臣周　濬

欽定四庫全書薈要

子部

御製數理精蘊下編卷十四五

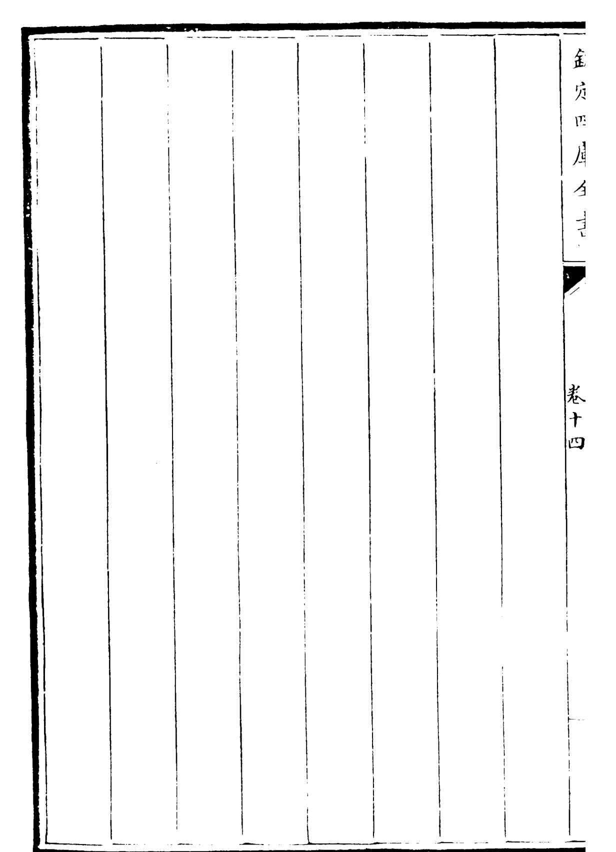
詳校官主事臣陳木

欽定四庫全書薈要卷一萬八百三十七 子部

御製數理精蘊下編卷十四

面部四

三角形



三角形

凡三角形立於圓界之一半者爲直角即勾股過圓界之一半者爲銳角不及圓界之一半者爲鈍角然不拘銳角鈍角自一角至底邊作垂線即分爲兩直角是仍不離乎勾股也兩腰等者垂線即當底之一半而兩腰不等者所分底界則有大小不同故和較相比之法因之而生蓋和求較較求和要必歸於勾股相求之理由勾股而得垂線則凡面積及內容方圓等形皆無不可得至於三角形角度相求之法乃

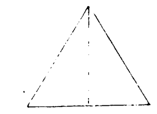
割圜八線實所以極三角之用即如周髀所謂仰矩知高偃矩知深是也故另為一卷兹但取三角形之面線相求諸法悉具圖解以次勾股使與勾股相表裏焉

設如有等邊三角形每邊十尺求中垂線幾何

甲
丙 丁 乙

法以底邊十尺折半得五尺為勾任以兩腰之一邊十尺為弦勾弦求股得八尺六寸六分零二毫有餘即為中垂線也如圖甲乙丙三角形其甲乙甲丙兩

腰相等則其底邊之乙丙兩角度亦必相等見幾何原本二卷第九節今所求之垂線爲甲丁即將甲乙丙三角形平分爲兩直角三角形而甲丁乙甲丁丙皆爲直角其度又等故所分之兩直角三角形爲同式形而甲丁垂線又爲兩三角形所共用之邊線則所分之底邊之乙丁丁丙爲得不等故將乙丙底邊折半爲勾任以甲乙甲丙兩邊之一邊爲弦求得股



爲中垂線也

又法以底邊十尺折半得五尺自乘得二十五尺三因之得七十五尺開方得八尺六寸六分零二毫有餘即爲中垂線也蓋弦比勾大一倍則弦之自乘之方必比勾之自乘之方大四倍爲連比例隔一位相加之比例見幾何原本七卷第五節依勾弦求股之法於弦自乘方積之四倍内減勾自乘方積之一倍餘三倍即爲

股自乘之方積是中垂線之自乘方積
爲勾自乘方積之三倍故將底邊折半
自乘三因之即與中垂線自乘之方積
等而開方得中垂線也

設如有鋭角三角形大腰一百二十二尺小腰一百
一十二尺底一百五十尺求中垂線幾何
法以底一百五十尺爲一率大腰一百
二十二尺與小腰一百一十二尺相加
得二百三十四尺爲二率以大腰一百

甲
丙　丁　乙

二十二尺與小腰一百一十二尺相減餘十尺為三率求得四率十五尺六寸為底邊之較與底一百五十尺相減餘一百三十四尺四寸折半得六十七尺二寸為勾以小腰一百一十二尺為弦求得股八十九尺六寸為中垂線也如圖甲乙丙三角形甲乙為大腰甲丙為小腰乙丙為底甲丁為所求中垂線試以甲為心丙為界作一圜截甲乙大腰

於庚截乙丙底於戊又將甲乙大腰引長至己作甲己線與甲丙小腰相等則己乙為兩腰之和庚乙為兩腰之較蓋甲庚與甲丙等故庚乙為兩腰之較乙丙為底邊之和乙戊為底邊之較蓋丁丙與丁戊等故乙戊為底邊之較今以乙丙底邊之和與乙己兩腰之和為比即同於乙庚兩腰之較與乙戊底邊之較為比為轉比例之四率幾何原本九卷第八節自圜外一點至圜內所作之兩線此兩全線之比例同於圜外兩段轉相比

之比例故乙丙爲一率乙巳爲二率乙庚爲三率求得四率爲乙戊既得乙戊則於乙丙底邉内減去乙戊餘戊丙折半得丁丙爲句甲丙爲弦求得股爲甲丁中垂線也

又法以大腰一百二十二尺自乘得一萬四千八百八十四尺又以小腰一百一十二尺自乘得一萬二千五百四十四尺兩自乘數相減餘二千三百四十

尺以底邊一百五十尺除之得十五尺六寸為底邊之較與底邊一百五十尺相減餘一百三十四尺四寸折半得六十七尺二寸為勾以小腰一百一十二尺為弦求得股八十九尺六寸為中垂線也如圖甲乙丙三角形試自甲角作甲丁垂線則分為甲丁乙甲丁丙兩勾股形甲乙甲丙皆為弦乙丁丁丙皆為勾共以甲丁為股乙丙為兩勾之和乙

戊為兩勾之較今以甲乙弦自乘則成甲戊己乙一正方形内丁庚辛乙為乙丁勾自乘之一正方形於甲戊己乙正方形内减去丁庚辛乙正方形所餘甲戊己辛庚丁磬折形積即與甲丁股自乘之一正方形等又以甲丙弦自乘則成甲壬癸丙一正方形内丁子丑丙為丁丙勾自乘之一正方形於甲壬癸丙正方形内减去丁子丑丙正方形所餘

甲壬癸丑子丁罄折形積亦與甲丁股自乘之一正方形等是則前圖之甲戊己辛庚丁罄折形與後圖之甲壬癸丑子丁罄折形相等矣若兩自乘之數相減則如甲戊己乙正方形內減去與甲壬癸丑子丁罄折形相等之甲戊己辛庚丁罄折形又減去丁子丑丙一小正方形所餘爲子庚辛乙丙丑一小罄折形引而長之成一長方形其長即乙丁

與丁丙之和其闊即乙丁與丁丙之較故以乙丁與丁丙之和除子庚辛乙丙丑罄折形之積而得乙丁與丁丙之較也又圖甲乙丙三角形作甲丁垂線分爲兩勾股形共以甲丁垂線爲股故甲乙弦自乘方內有甲丁股自乘一方乙丁勾自乘一方而甲丙弦自乘方內有甲丁股自乘一方丁丙勾自乘一方今兩勾股形之股既同則兩弦方相減所

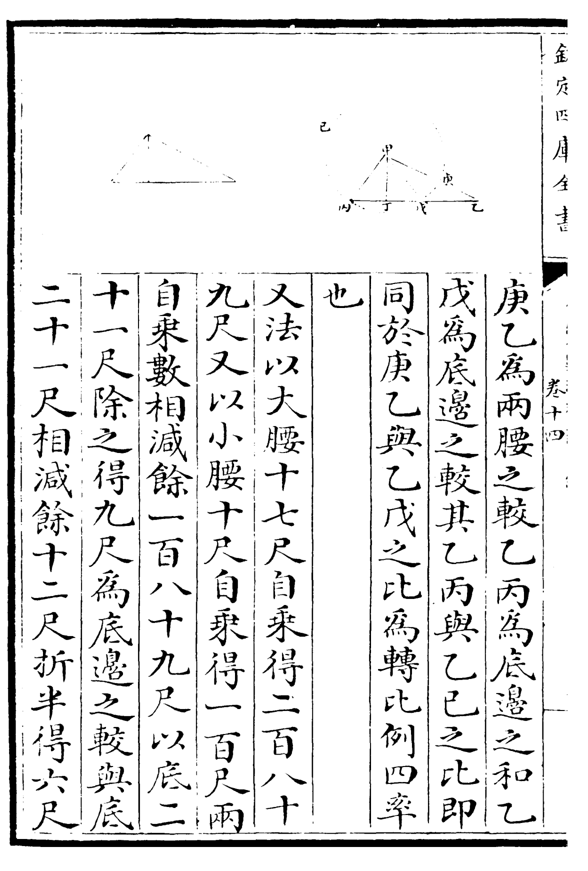
餘之數即兩勾方相減所餘之數故甲丁乙勾股形之甲乙弦自乘方內減甲丁丙勾股形之甲丙弦自乘方所餘庚辛乙寅丑子磬折形即與甲丁乙勾股形之丁乙勾自乘方內減甲丁丙勾股形之丁丙勾自乘方所餘乙卯辰巳申未磬折形相等若將乙卯辰巳申未磬折形引而長之遂成乙壬酉未長方形其長即乙丁丁丙兩勾之和其闊即乙

丁丁丙兩勾之較其積即乙丁丁丙兩勾方相減之餘亦即甲乙甲丙兩弦方相減之餘是以兩弦自乘相減之餘積以兩勾之和除之而得兩勾之較也

設如有鈍角三角形大腰十七尺小腰十尺底二十一尺求中垂線幾何

法以底二十一尺為一率以大腰十七尺與小腰十尺相加得二十七尺為二率以大腰十七尺與小腰十尺相減餘

七尺為三率求得四率九尺為底邊之較與底二十一尺相減餘十二尺折半得六尺為勾以小腰十尺為弦求得股八尺為中垂線也如圖甲乙丙三角形甲乙為大腰甲丙為小腰乙丙為底甲丁為所求中垂線試以甲為心丙為界作一圜截甲乙大腰於庚截乙丙底邊於戊又將甲乙大腰引長至己作甲己線與甲丙小腰等則己乙為兩腰之和



庚乙爲兩腰之較乙丙爲底邊之和乙戊爲底邊之較其乙丙與乙巳之比即同於庚乙與乙戊之比爲轉比例四率也

又法以大腰十七尺自乘得二百八十九尺又以小腰十尺自乘得一百尺兩自乘數相減餘一百八十九尺以底二十一尺除之得九尺爲底邊之較與底二十一尺相減餘十二尺折半得六尺

爲勾以小腰十尺爲弦求得股八尺爲中垂線也圖解同前

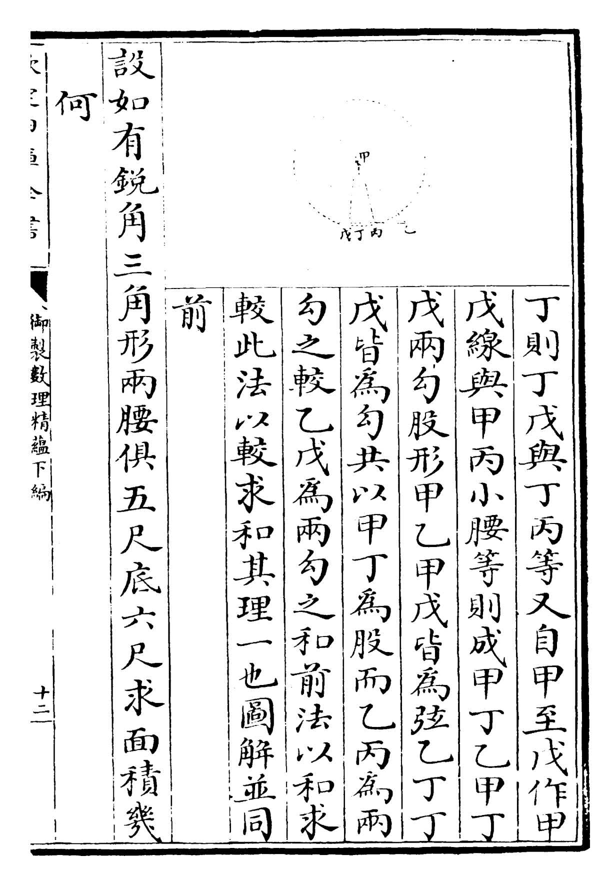
設如有斜立鈍角三角形大腰二十一尺小腰十七尺底十尺求形外垂線幾何

法以底十尺爲一率大腰二十一尺與小腰十七尺相減餘四尺爲二率大腰二十一尺與小腰十七尺相加得三十八尺爲三率求得四率十五尺二寸爲底與形外垂線兩邊連底之總內減去

底十尺餘五尺二寸折半得二尺六寸爲勾以小腰十七尺爲弦求得股十六尺八寸爲形外垂線也如圖甲乙丙三角形甲乙爲大腰甲丙爲小腰乙丙爲底甲丁爲所求形外垂線試以甲爲心丙爲界作一圜截甲乙大腰於庚又將甲乙大腰引長至己作甲己線與甲丙小腰相等復將乙丙底引長至戊作乙戊線則成甲乙戊三角形其乙丙爲底

邊之較乙戊為底邊之和乙庚為兩腰之較乙己為兩腰之和自圜外至圜内所作兩線之比例既同於圜外兩段轉相比之比例則圜外兩段之比例亦必同於兩全線轉相比之比例故乙丙與乙庚之比即同於乙己與乙戊之比為比例四率既得乙戊則減乙丙餘丙戊折半得丙丁為勾甲丙為弦求得股即甲丁垂線也

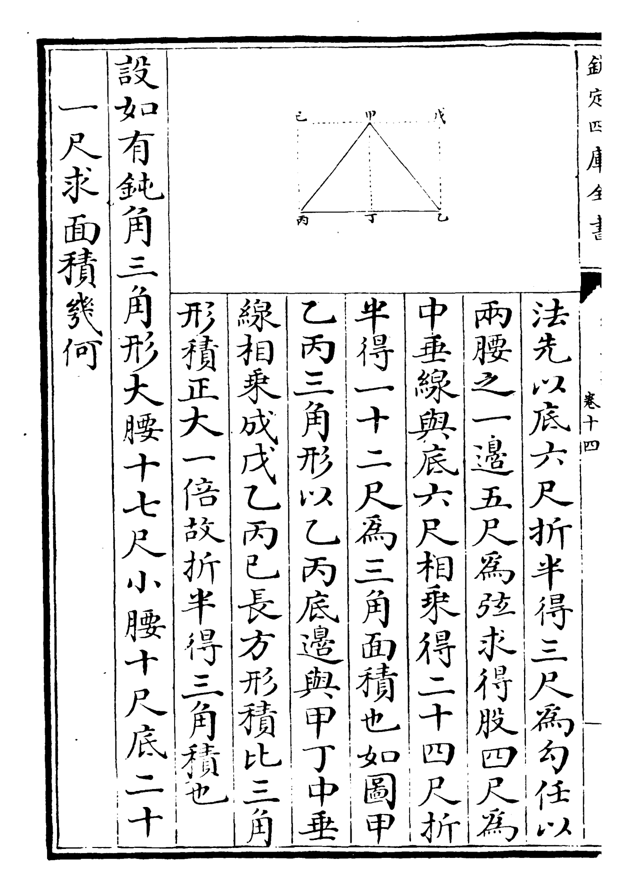
又法以大腰二十一尺自乘得四百四十一尺又以小腰十七尺自乘得二百八十九尺兩自乘數相減餘一百五十二尺以底十尺除之得十五尺二寸為底與形外垂線兩邊連底之總内減底十尺餘五尺二寸折半得二尺六寸為勾以小腰十七尺為弦求得股十六尺八寸為形外垂線也如圖甲乙丙三角形將乙丙底引長至戊自甲作垂線至



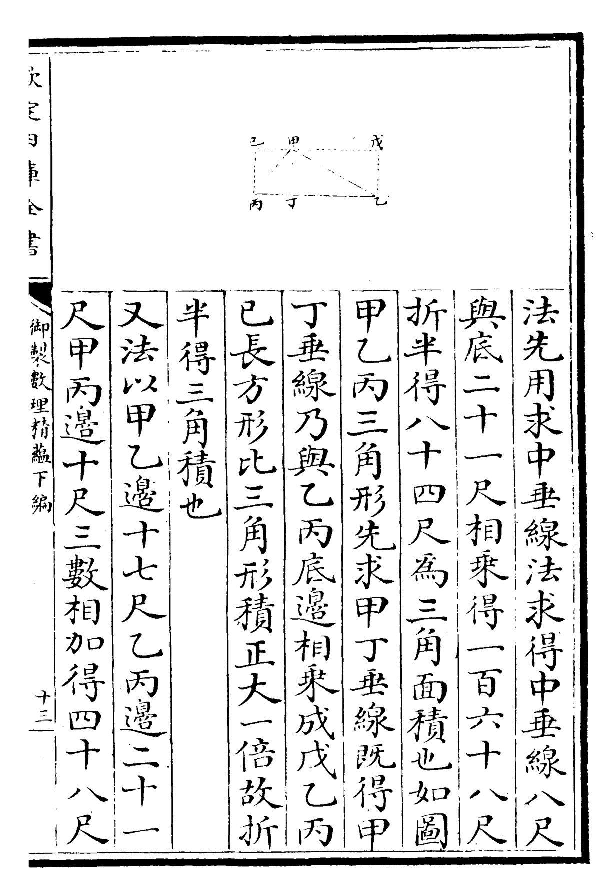
丁則丁戊與丁丙等又自甲至戊作甲戊線與甲丙小腰等則成甲丁乙甲丁戊兩勾股形甲乙甲戊皆為弦乙丁丁戊皆為勾共以甲丁為股而乙丙為兩勾之較乙戊為兩勾之和前法以和求較此法以較求和其理一也圖解並同前

設如有銳角三角形兩腰俱五尺底六尺求面積幾何

法先以底六尺折半得三尺爲勾任以兩腰之一邊五尺爲弦求得股四尺爲中垂線與底六尺相乘得二十四尺折半得一十二尺爲三角面積也如圖甲乙丙三角形以乙丙底邊與甲丁中垂線相乘成戊乙丙己長方形積比三角形積正大一倍故折半得三角積也



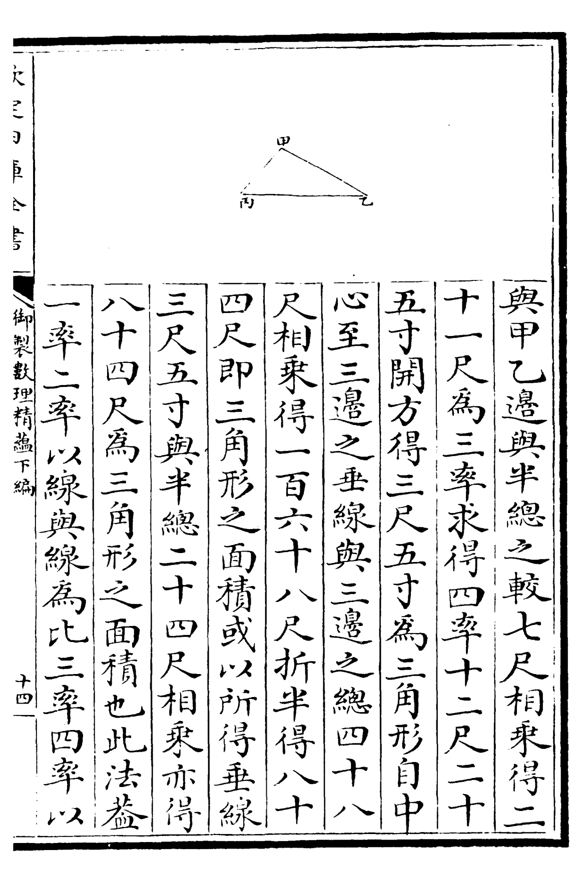
設如有鈍角三角形大腰十七尺小腰十尺底二十一尺求面積幾何



法先用求中垂線法求得中垂線八尺與底二十一尺相乘得一百六十八尺折半得八十四尺爲三角面積也如圖甲乙丙三角形先求甲丁垂線既得甲丁垂線乃與乙丙底邊相乘成戊乙丙己長方形比三角形積正大一倍故折半得三角積也

又法以甲乙邊十七尺乙丙邊二十一尺甲丙邊十尺三數相加得四十八尺

爲三邊之總折半得二十四尺爲半總以甲乙邊十七尺與半總二十四尺相減餘七尺爲甲乙邊與半總之較以乙丙邊二十一尺與半總二十四尺相減餘三尺爲乙丙邊與半總之較以甲丙邊十尺與半總二十四尺相減餘十四尺爲甲丙邊與半總之較乃以半總二十四尺爲一率甲丙邊與半總之較十四尺爲二率乙丙邊與半總之較三尺



與甲乙邊與半總之較七尺相乘得二十一尺爲三率求得四率十二尺二十五寸開方得三尺五寸爲三角形自中心至三邊之垂線與三邊之總四十八尺相乘得一百六十八尺折半得八十四尺即三角形之面積或以所得垂線三尺五寸與半總二十四尺相乘亦得八十四尺爲三角形之面積也此法葢一率二率以線與線爲比三率四率以



面與面爲比也如甲乙丙三角形自中心丁至三邊各作一垂線又自中心丁至三角各作一分角線即成六直角三角形俱兩兩相等丁己丙與丁庚丙等丁己乙與丁戊乙等丁戊甲與丁庚甲等又按甲戊度引乙丙線至辛則乙辛爲三邊之半總即三較之和乙己與乙戊等即甲丙邊與半總之較己丙與丙庚等即甲乙邊與半總之較丙辛與甲戊甲庚等即乙丙邊與半總之較試自辛作直角將乙丁線引長作一乙辛壬直角形則壬

辛與丁巳平行乙辛壬形與乙巳丁形遂爲同式形其乙辛與乙巳之比即同於壬辛與丁巳之比然乙辛一率乙巳二率之數雖有而壬辛之數却無又但知巳丙與丙辛相乘之數即丁巳與壬辛相乘之數故以巳丙與丙辛相乘之數爲三率何以知巳丙與丙辛相乘之數即丁巳與壬辛相乘之數試作壬丙線壬癸線使丙癸與丙辛等癸角辛角皆爲直角癸丙辛角與辛壬癸角相合共成一百八十度然庚丙巳角爲癸丙辛角之外角相合亦共成一

百八十度是庚丙己角與庚丁己角與癸丙辛角等是以壬癸角等癸丙辛形與丙庚丁己形爲同式形丙丙辛壬勾股形與丁己丙勾股形亦爲同式形可互相比例矣以丁己作一率己丙作二率丙辛作三率即得四率壬辛是以己丙二率與丙辛三率相乘之數即與丁己一率與壬辛四率相乘之數等故直以己丙丙辛相乘之數作三率也其所得四率即丁己自乘之數是故乙辛與乙己之比同於丁己與壬辛相乘之面即己丙與丙辛相乘之面與丁己自乘之面之比也既得丁己自乘之面故開方而得丁己爲三角形自

中心至三邉之垂線與丁戊丁庚俱相等又即三角形容圜之半徑也既得自中心至三邉之垂線則用垂線與三邉之總相乘所得一長方積即如用垂線與三邉各相乘所得三長方積合為一長方比三角形積大一倍故折半而得三角形之面積如以垂線與半總相乘即與三角形積等而不用折半矣

設如有鈍角三角形大腰三十七尺小腰十五尺底

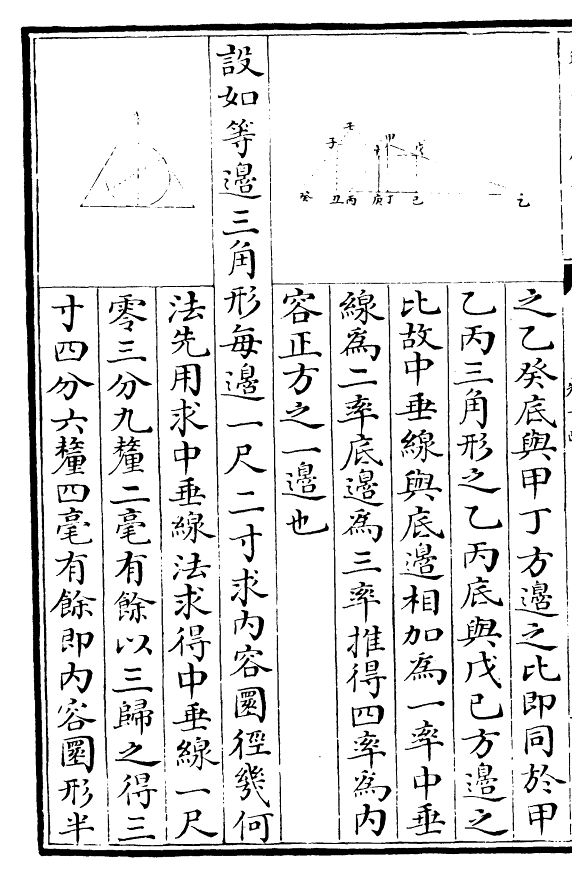
四十四尺求內容正方邊幾何

甲 戊 辛 丙 庚 丁 巳 乙

法先用求中垂綫法求得中垂綫十二尺與底邊四十四尺相加得五十六尺為一率中垂綫十二尺為二率底邊四十四尺為三率推得四率九尺四寸二分八釐五毫有餘即三角形內所容正方之一邊也如圖甲乙丙三角形甲乙為大腰甲丙為小腰乙丙為底甲丁為所得中垂綫戊巳庚辛為今所求內容

壬 甲 戊
子 辛
癸 丑 丙 庚 丁 己 乙

正方形試依甲丁中垂線度將乙丙線引長作乙癸線為五十六尺又與甲丙線平行作壬癸線又將甲乙線引長作壬乙線則成與甲乙丙同式之壬乙癸三角形復與底線平行作甲子線與丙癸等即與甲丁垂線等又與甲丁平行作子丑線與甲丁等則甲丁垂線所作甲丁丑子正方形即為壬乙癸三角形內所容之正方形矣故壬乙癸三角形



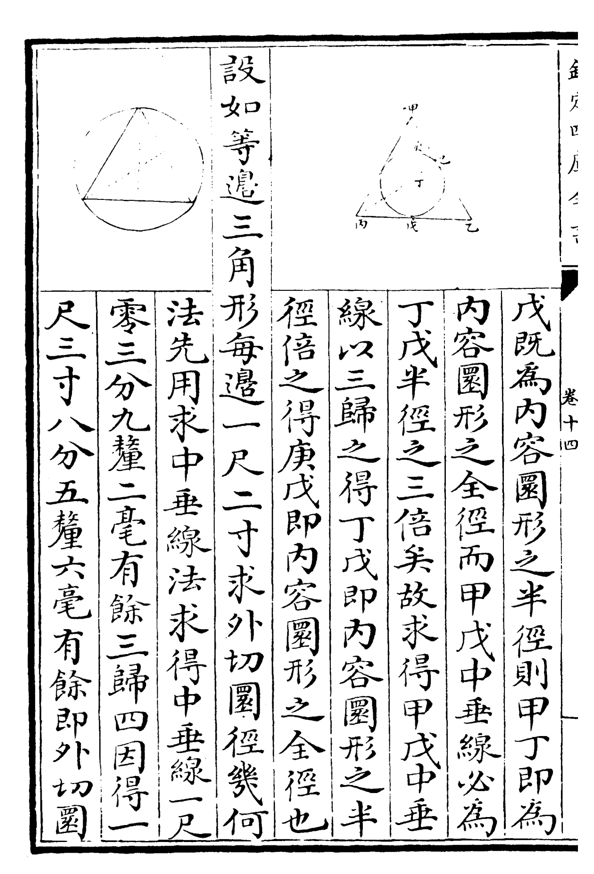
之乙癸底與甲丁方邊之比即同於甲乙丙三角形之乙丙底與戊己方邊之比故中垂線與底邊相加為一率中垂線為二率底邊為三率推得四率為內容正方之一邊也

設如等邊三角形每邊一尺二寸求內容圓徑幾何

法先用求中垂線法求得中垂線一尺零三分九釐二毫有餘以三歸之得三寸四分六釐四毫有餘即內容圓形半

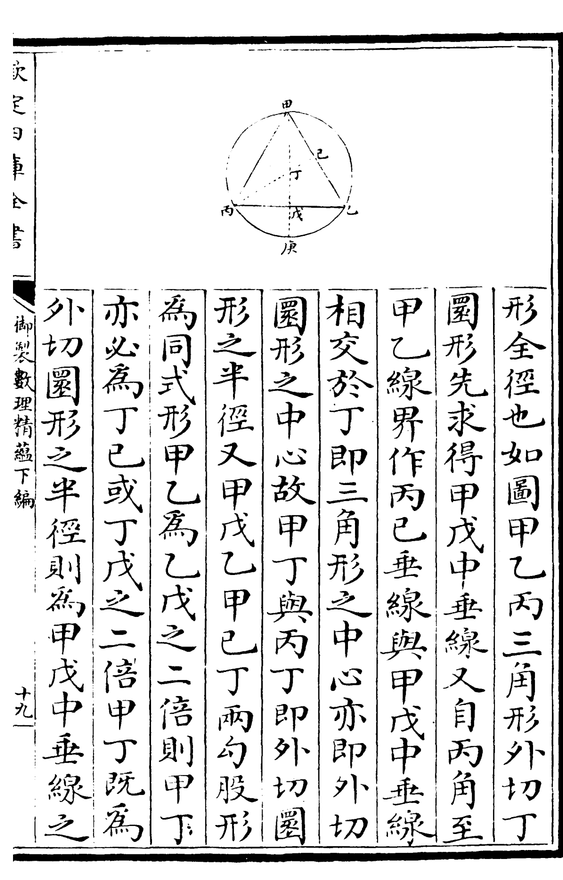
徑倍之得六寸九分二釐八毫有餘即內容圜形全徑也如圖甲乙丙三角形內容丁圜形先求得甲戊中垂線又自丙角至甲乙線界作丙己垂線與甲戊中垂線相交於丁即三角形之中心亦即內容圜形之中心故丁戊與丁己即內容圜形之半徑又甲戊乙甲己丁兩勾股形爲同式形甲乙爲乙戊之二倍則甲丁亦必爲丁己或丁戊之二倍丁

戊既爲内容圜形之半徑則甲丁即爲内容圜形之全徑而甲戊中垂線必爲丁戊半徑之三倍矣故求得甲戊中垂線以三歸之得丁戊即内容圜形之半徑倍之得庚戊即内容圜形之全徑也

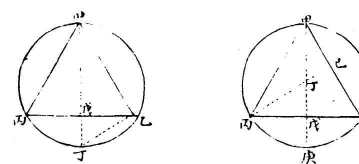
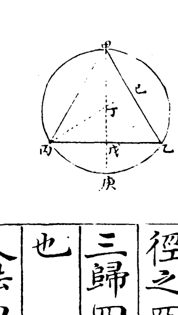


設如等邊三角形每邊一尺二寸求外切圜徑幾何

法先用求中垂線法求得中垂線一尺零三分九釐二毫有餘三歸四因得一尺三寸八分五釐六毫有餘即外切圜

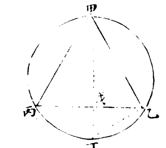


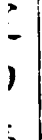
形全徑也如圖甲乙丙三角形外切丁圜形先求得甲戊中垂線又自丙角至甲乙線界作丙己垂線與甲戊中垂線相交於丁即三角形之中心亦即外切圜形之中心故甲丁與丙丁即外切圜形之半徑又甲戊乙甲己丁兩勾股形爲同式形甲乙爲乙戊之二倍則甲丁亦必爲丁己或丁戊之二倍甲丁既爲外切圜形之半徑則爲甲戊中垂線之

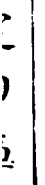



三分之二而甲戊中垂線却為甲庚全徑之四分之三矣故求得甲戊中垂線三歸四因得甲庚即外切圜形之全徑也

又法以每邊一尺二寸自乘三歸四因開方得一尺三寸八分五釐六毫有餘即外切圜形全徑也如圖甲乙丙三角形外切甲乙丁丙圜形試自甲角作甲戊中乘線又引長作甲丁全徑線復自





丁至乙作丁乙線遂成甲乙丁甲戊乙兩勾股形爲同式形甲乙既爲乙戊之二倍則甲丁亦必爲乙丁之二倍故甲丁自乘方積比乙丁自乘方積大四倍若依勾弦求股之法言之則甲丁弦自乘方積内減乙丁勾自乘方積所餘爲甲乙股自乘之方積今甲丁弦自乘方積既爲乙丁勾自乘方積之四倍則是甲乙每邉自乘方積爲甲丁全徑自乘

方積之四分之三矣故以一邊自乘三歸四因即與全徑自乘之方積等而開方得外切圜形之全徑也

設如有銳角三角形大腰三百三十八尺小腰三百尺底四百一十八尺求內容圜徑幾何

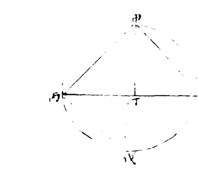
法先用求中垂線法求得中垂線二百四十尺與底四百一十八尺相乘得一十萬零三百二十尺以大腰三百三十八尺小腰三百尺底四百一十八尺三

數相加得一千零五十六尺除之得九十五尺即内容圜半徑倍之得一百九十尺即内容圜全徑也如圖甲乙丙三角形内容戊圜形試自圜之中心至甲乙丙三角各作戊甲戊乙戊丙三線遂分甲乙丙三角形爲甲戊乙甲戊丙乙戊丙三三角形其三邉皆爲三角形之底而戊己半徑皆爲三角形之垂線今乙丙底邉與甲丁中垂線相乗所得之

長方積原比甲乙丙三角形積大一倍即如將所分三三角形各用垂線乘底邊所得之三長方積合爲一長方也三長方之長雖不同而闊則一故各以長除積而得闊者即如合三角形之三邊除三角形之倍積而得半徑也

設如有鋭角三角形大腰一百八十三尺小腰一百六十八尺底二百二十五尺求外切圜徑幾何

法用求中垂線法求得中垂線一百三



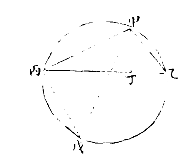
十四尺四寸爲一率小腰一百六十八尺爲二率大腰一百八十三尺爲三率推得四率二百二十八尺七寸五分即外切圜徑也如圖甲乙丙三角形甲乙爲小腰甲丙爲大腰乙丙爲底甲丁爲中垂線試作切三角一圜自甲角至圜對界作甲戊全徑線又自丙角至戊作丙戊線則甲丙戊三角形之丙角立於圜界之一半必爲直角與甲丁垂線所

分甲丁乙三角形之丁角等而戊角與乙角皆對甲丙弧其度又等故甲丙戊與甲丁乙兩三角形爲同式形是以甲丁與甲乙之比同於甲丙與甲戊之比而爲相當比例四率也

設如有鈍角三角形大腰十七尺小腰十尺底二十一尺求外切圜徑幾何

法用求中垂線法求得中垂線八尺爲一率小腰十尺爲二率大腰十七尺爲





三率推得四率二十一尺二寸五分即外切圜徑也如圖甲乙丙三角形甲乙爲小腰甲丙爲大腰乙丙爲底甲丁爲中垂線試作切三角一圜自甲角至圜對界作甲戊全徑線又自丙角至戊作丙戊線則甲丙戊三角形之丙角立於圜界之一半必爲直角與甲丁垂線所分甲丁乙三角形之丁角等而戊角與乙角皆對甲丙弧其度又等故甲丙戊

與甲丁乙兩三角形為同式形是以甲丁與甲乙之比同於甲丙與甲戊之比而為相當比例四率也